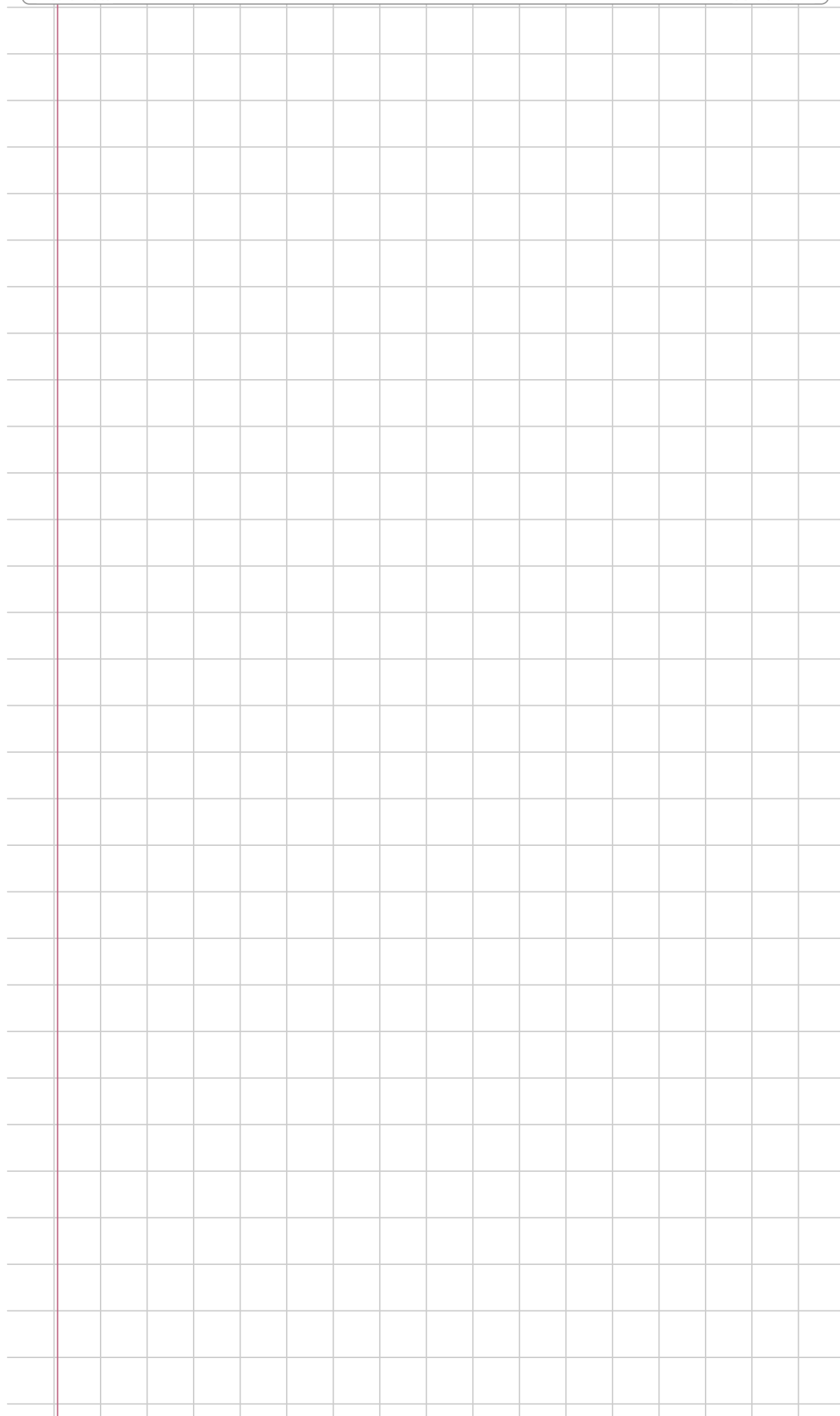


Lezione 7 - Analisi Matematica 1 - 15 ottobre 2013

Titolo nota

08/10/2012



L'insieme $\mathbb{R}$ è definito da

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) (x+y)+z = x+(y+z) \\ 2) x+y = y+x \\ 3) \exists 0 \in \mathbb{R} \quad x+0 = 0+x = x \\ 4) \forall x \in \mathbb{R} \exists (-x) \in \mathbb{R} : x+(-x) = 0 = (-x)+x \end{array} \right. \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 5) (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \\ 6) x \cdot y = y \cdot x \\ 7) \exists 1 \neq 0, x \cdot 1 = 1 \cdot x \\ 8) \forall x \neq 0 \exists \frac{1}{x} \in \mathbb{R} : x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot x = 1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \forall x, y, z \in \mathbb{R} \\ \forall x, y \in \mathbb{R} \\ \forall x \in \mathbb{R} \\ \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 9) x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z \end{array} \right. \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 10) x \leq y \Rightarrow x+z \leq y+z \end{array} \right. \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 11) x \leq y \Rightarrow x \cdot c \leq y \cdot c \end{array} \right. \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad \forall c \geq 0$$

L'ordine " $\leq$ " è TOTALE nel senso che

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ vale 1 ed 1 sola tra le seguenti

$$i) x < y \quad ii) x = y \quad iii) x > y$$

NOTA BENE : Tutte queste

proprietà sono soddisfatte anche da



⑫ ASSIOMA DI COMPLETEZZA (Dedekind)

$$\forall A, B \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset, B \neq \emptyset, \exists \leq b \quad \forall a \in A \quad \forall b \in B$$

$$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : \exists \leq c \leq b \quad \forall a \in A \quad \forall b \in B$$

Teoremi

$A \subseteq \mathbb{R}$ (i) se $\exists \bar{a} = \min A$ allora $\bar{a}$ è unico

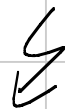
(ii) se $\exists \bar{a} = \max A$ allora $\bar{a}$ è unico

dim

(i) per assurdo $\exists \bar{a}_1, \bar{a}_2$ entrambi minimo

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 \leq \exists \forall a \in A \Rightarrow \bar{a}_1 \leq \bar{a}_2 \\ \bar{a}_2 \leq \exists \forall a \in A \Rightarrow \bar{a}_2 \leq \bar{a}_1 \Rightarrow \bar{a}_1 = \bar{a}_2 \end{aligned}$$

(ii) Analogo a (i)



$$A \neq \emptyset \quad \mathcal{M}_A \neq \emptyset$$

$$\Lambda = \sup A \quad \text{se} \quad \Lambda = \min \mathcal{M}_A$$

$$A \neq \emptyset \quad \mathcal{m}_A \neq \emptyset$$

$$\lambda = \inf A \quad \text{se} \quad \lambda = \max \mathcal{m}_A$$

$$\text{Oss: } \begin{aligned} \lambda = \min A & \quad \underline{\text{se}} \quad \lambda \in A \cap \mathcal{m}_A \\ \lambda = \max A & \quad \underline{\text{se}} \quad \lambda \in A \cap \mathcal{M}_A \end{aligned}$$

Oss: $\lambda = \sup A$ se esiste è unico

$\lambda = \inf A$ se esiste è unico

Esercizio

$$A = \emptyset \Rightarrow \inf A = +\infty$$

$$\sup A = -\infty$$

Oss: $A \neq \emptyset$ e $M_A = \emptyset \Rightarrow \sup A = +\infty$ (es. $\sup \mathbb{N}$)

$A \neq \emptyset$ e $m_A = \emptyset \Rightarrow \inf A = -\infty$ (es. $\inf \mathbb{Z}$)

Teorema (esistenza estremo superiore in $\mathbb{R}$)

$$A \subseteq \mathbb{R} \quad A \neq \emptyset \quad M_A \neq \emptyset \Rightarrow \exists \sup A$$

analoga mente

Teorema

$$A \subseteq \mathbb{R} \quad A \neq \emptyset \quad m_A \neq \emptyset \Rightarrow \exists \inf A$$

Om Azioma di Dedekind $\Leftrightarrow$ $\exists$ dell'estremo superiore
di insiemi limitati

$\Leftarrow$
Non l'abbiamo provata (Esercizio)

Esercizio Se esiste $\sup A$ allora questo è unico

$$\text{dim} \quad \exists \sup A = \lambda = \min M_A$$

$$\text{osservando } \exists \lambda_1, \lambda_2 \quad \lambda_1 = \min M_A \quad \lambda_2 = \min M_A$$

$$\text{dovrà essere } \left. \begin{array}{l} \lambda_1 \leq b \quad \forall b \in M_A \Rightarrow \lambda_1 \leq \lambda_2 \\ \lambda_2 \leq b \quad \forall b \in M_A \Rightarrow \lambda_2 \leq \lambda_1 \end{array} \right\} \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \quad \checkmark$$

Teorema $\mathbb{Q}$ non soddisfa l'assioma di Dedekind

Prendi $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 0, x^2 < 2\} = [0, \sqrt{2}[\cap \mathbb{Q}$

$B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 0, x^2 > 2\} =]\sqrt{2}, +\infty[\cap \mathbb{Q}$

• certamente $a \leq \sqrt{2} \leq b \quad \forall a \in A \quad \forall b \in B$
però $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Certamente
 $\sqrt{2}$
separa
 A e B

• $A = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0, x^2 < 2\}$

Preso $\forall a \in A$, $\exists (a + \frac{1}{N}) \in A$ per un certo
 N sufficientemente
grande

$$\begin{aligned} \left(a + \frac{1}{N}\right)^2 &= a^2 + \frac{1}{N^2} + \frac{2a}{N} \leq a^2 + \frac{1}{N} + \frac{2a}{N} \\ &= a^2 + \frac{2a+1}{N} < 2 \end{aligned}$$

per $\frac{2a+1}{N} < 2 - a^2$

per $\frac{2a+1}{2-a^2} < N$

$\forall a \in A \quad \exists N > \frac{2a+1}{2-a^2} \text{ t.c. } a + \frac{1}{N} \in A$

$\Leftrightarrow A$ NON HA MASSIMO

• A non possiede massimo

In fatti, preso $a \in A$, esiste $a + \frac{1}{N} \in A$ (per N opportuno)

$$\left(a + \frac{1}{N}\right)^2 = a^2 + \frac{1}{N^2} + \frac{2a}{N} \leq a^2 + \frac{1}{N} + \frac{2a}{N} < 2$$

$$\text{non oppure } \frac{2a+1}{N} < 2 - a^2$$

$$\text{" " } N > \frac{2a+1}{2-a^2}$$

• B non possiede minimo

preso $b \in B$, $\exists (b - \frac{1}{N}) \in B$ (per N opportuno)

$$\left(b - \frac{1}{N}\right)^2 = b^2 + \frac{1}{N^2} - \frac{2b}{N} \geq b^2 - \frac{1}{N} - \frac{2b}{N} = b^2 - \frac{2b+1}{N} > 2$$

$$\text{non oppure } b^2 - 2 > \frac{2b+1}{N}$$

$$\text{" " } N > \frac{2b+1}{b^2-2}$$

B NON POSSI DE MINIMO

Note Bene $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 0, x^2 \leq 2\}$
 è un insieme limitato superiormente
 ma $\sup A \notin \mathbb{Q}$

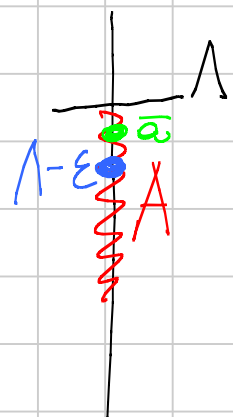
analogamente $\inf B \notin \mathbb{Q}$

$$\Lambda = \sup A < +\infty$$

$$\Lambda = \min M_A \quad \text{per} \quad \begin{cases} a \leq \Lambda \quad \forall a \in A \\ \Lambda \leq b \quad \forall b \in M_A \end{cases}$$

$$\text{per} \quad \begin{cases} a \leq \Lambda \quad \forall a \in A \\ \forall z < \Lambda, z \notin M_A \end{cases} \quad \rightarrow \quad \Lambda \text{ è un maggiorante}$$

$$\text{per} \quad \begin{cases} a \leq \Lambda \quad \forall a \in A \\ \forall z < \Lambda \quad \exists \bar{a} \in A : z < \bar{a} \end{cases}$$



$$\text{per} \quad \begin{cases} a \leq \Lambda \quad \forall a \in A \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{a} \in A : \Lambda - \varepsilon < \bar{a} \end{cases}$$

$$\lambda = \inf A \Leftrightarrow \dots \quad \begin{cases} \lambda \leq a \quad \forall a \in A \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{a} \in A \quad \bar{a} < \lambda + \varepsilon \end{cases}$$

Costruzione di $\mathbb{R}$ con le sezioni

a partire da $\mathbb{Q}$ con l'assioma dedekind dello continuo $\mathbb{R}$
che

Def " α " è una "sezione" se " $\alpha =]-\infty, \alpha[\cap \mathbb{Q}$ "

ovvero

1) " α " $\neq \emptyset$.

2) " α " $\neq \mathbb{Q}$.

3) $x \in \alpha$ e $y \leq x \Rightarrow y \in \alpha$

4) $x \in \alpha \Rightarrow \exists y \in \alpha : x \leq y$

$$\alpha = \{x \in \mathbb{Q} : x < \alpha\} \longleftrightarrow \alpha = \sup \alpha$$

A partire da una sezione, per l'assioma di Dedekind si individua un u.ivo reale, l'estremo superiore della sezione

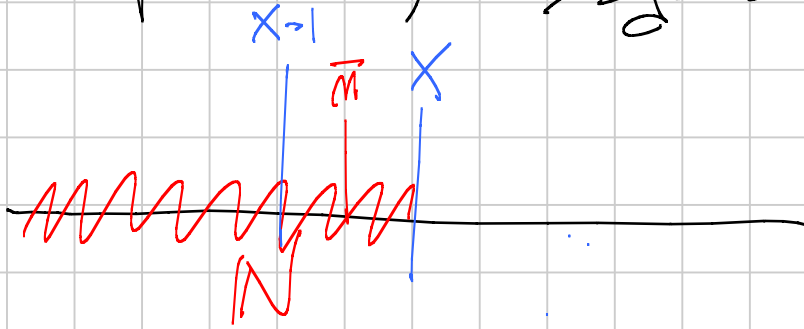
Oss: $\mathbb{N}$ è illimitato superiormente
ovvero $\sup \mathbb{N} = +\infty$

Teorema (Proprietà di Archimede)

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad x < n$$

dimu

* Assurdo $\exists x \in \mathbb{R} : \forall n \quad x \geq n \Rightarrow \exists x \in \mathbb{M}_N$
ASSURDO
(N è sup. illimitato) $\Rightarrow$ segue la Terza 



Corollario

① Se $x > 0$ allora $\exists n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{n} < x$

② Se $x < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ allora $x \leq 0$

dim

① $\exists m \in \mathbb{N} : \frac{1}{m} < x \quad (x > 0)$

$\exists n \in \mathbb{N} : m > \frac{1}{x}$

ovvio poiché $\sup \mathbb{N} = +\infty$

② Se $\underbrace{x < \frac{1}{n} \quad \forall n}_A$ allora $\underbrace{x \leq 0}_B$

$A \Rightarrow B$

$\Updownarrow$

$\neg B \Rightarrow \neg A$

$\Updownarrow$

$\neg(x \leq 0) \Rightarrow \neg(\forall n \quad x < \frac{1}{n})$

$x > 0 \Rightarrow \exists n : x > \frac{1}{n}$

Def Dati $A \subseteq B$ due insiemi ordinati, diciamo che " A è denso in B " se $\forall x, y \in B, x < y \exists z \in A : x < z < y$

Qm se A è denso in B allora ogni elemento di B può essere approssimato e partire dagli elementi dell'insieme A

$A \subseteq B$, A denso in B . Preso $y \in B, A$,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x \in A : \underbrace{y - \varepsilon}_{\in B} < x < \underbrace{y}_{\in B}$$

$$" \quad " \quad : \quad \underbrace{y}_{\in B} < x < \underbrace{y + \varepsilon}_{\in B}$$

$$\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad 1,41\dots$$

$$1 < 2 < 4 \iff 1 < \sqrt{2} < 2$$

$$(1,4)^2 < 2 < (1,5)^2 \iff 1,4 < \sqrt{2} < 1,5$$

$$(1,41)^2 < 2 < (1,42)^2 \iff 1,41 < \sqrt{2} < 1,42$$

Qm Il computer lavora con

un sottoinsieme FINITO di $\mathbb{Q}$

e quindi è FONDAMENTALE che $\mathbb{Q}$ sia

denso in $\mathbb{R}$!

Teorema

$\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ ^{dim} $x < y$ allora $\exists z \in \mathbb{Q}$ $x < z < y$



basta prendere $x, y \in \mathbb{Q}$ allora $z = \frac{x+y}{2}$ No pens!

Prendiamo $x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, ovvero IRRAZIONALI

$$d = |x - y| > 0$$

$\exists q_0 \in \mathbb{Q}$ con $q_0 < x$ (infatti $\inf \mathbb{Q} = -\infty$)

$$\exists N > 0 : \frac{1}{N} < |x - y|$$

$$A = \left\{ m \in \mathbb{N} : q_0 + m \frac{1}{N} > x \right\}$$

$$A \neq \emptyset \text{ infatti, } q_0 + m \frac{1}{N} > x \Leftrightarrow m \frac{1}{N} > x - q_0$$

$$\Leftrightarrow m > N(x - q_0)$$

$\exists m \in \mathbb{N} : m > N(x - q_0)$? sì poiché
 $\sup \mathbb{N} = +\infty$

e dunque $A \neq \emptyset$ $\left(A = \left\{ m : q_0 + m \frac{1}{N} > x \right\} \right)$

$$A \subseteq \mathbb{N} \quad A \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad \exists \bar{m} = \min A$$

principio
minimo intero

$$i) \quad q_0 + \bar{m} \frac{1}{N} > x$$

$$ii) \quad \bar{m} - 1 \notin A \quad \Rightarrow \quad q_0 + (\bar{m} - 1) \frac{1}{N} < x$$

Allora

$$q_0 + (\bar{m} - 1) \frac{1}{N} + \frac{1}{N} < x + \frac{1}{N} < x + d = y$$

$$\parallel$$

$$q_0 + \bar{m} \cdot \frac{1}{N}$$

$\downarrow$
 x

$$\Leftrightarrow \quad x < q_0 + \bar{m} \cdot \frac{1}{N} < y \quad \Downarrow$$

Esercizio : Provare che $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ è
denso in $\mathbb{R}$