Lezione 6 - Analisi Matematica 1 - 14 ottobre 2013

Titolo nota 08/10/2012

$\mathbb{Z}$ = Numeri relativi = $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

$\mathbb{N}\times\mathbb{N} / \sim$

Introduco $\mathbb{Z}$ perche $\quad x+3=2$

non ha soluzioni in $\mathbb{N}$ $\quad x=2-3$

$+ : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$

associativa $\quad (a+b)+c = a+(b+c) \quad \forall a,b,c\in\mathbb{Z}$

commutativa $\quad a+b=b+a \quad \forall a,b\in\mathbb{Z}$

$\exists$ l'elemento neutro $\quad 0+a=a+0=a \quad \forall a\in\mathbb{Z}$

$\forall a\in\mathbb{Z}\ \exists b\in\mathbb{Z} : a+b=b+a=0 \quad b=-a$

$x\cdot 3 = 2$ Non ha soluzioni in $\mathbb{Z}$

$x = 2/3$

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{8}{12} \qquad [(2/3)]$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z} \quad n \neq 0 \right\}$$

Numeri Razionali

$$\frac{m}{n} + \frac{m'}{n'} = \frac{m \cdot n'}{n \cdot n'} + \frac{m' n}{n' \cdot n} =$$

$$= \frac{m \cdot n' + m' \cdot n}{n \cdot n'}$$

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{m'}{n'} = \frac{m \cdot m'}{n \cdot n'}$$

$+ : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$

associativa

commutativa

$\exists$ l'elemento neutro 0

$\exists$ l'opposto additivo $\forall \frac{m}{n} \; \exists -\frac{m}{n} :$

$$\frac{m}{n} - \frac{m}{n} = 0$$

$\cdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$

associativa

commutativa

$\exists$ l'elemento neutro 1 : $\frac{m}{n} \cdot 1 = 1 \cdot \frac{m}{n} = \frac{m}{n}$

$\exists$ l'inverso moltiplicativo

$$\forall \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \; \exists \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \setminus 0 : \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{p}{q} \cdot \frac{m}{n} = 1$$

(ovviamente $\frac{p}{q} = \frac{n}{m}$!)

- Proprietà distributiva

$$\frac{m}{n}\cdot\left(\frac{p}{q}+\frac{r}{s}\right)=\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}+\frac{m}{n}\cdot\frac{r}{s}$$

- Si può introdurre un ordine totale

ovvero dati $x,y\in\mathbb{Q}$
1) $x<y$ o 2) $x=y$ o 3) $x>y$

- $\forall a,b,c\in\mathbb{Q}$ $c>0$

$a\leq b$ $c>0\Rightarrow a\cdot c\leq b\cdot c$

$a\leq b$ $\forall c$ $\Rightarrow a+c\leq b+c$

Compatibilità tra ordine e le operazioni

Oss: per i calcoli che si fanno ogni giorno, è sufficiente $\mathbb{Q}$

(un computer utilizza un sottoinsieme finito di $\mathbb{Q}$)

A insieme ordinato

$\bar{a} = \max A$ se $a \leq \bar{a}$ $\forall a \in A$, $\bar{a} \in A$

$\bar{\bar{a}} = \min A$ se $\bar{\bar{a}} \leq a$ $\forall a \in A$, $\bar{\bar{a}} \in A$

<u>Esempio</u>

$A = \{2, 5, 7, \pi - 3\}$ $\max A = 7$

$\min A = \pi - 3$

<u>Teorema</u>

Se $\# A = n < +\infty$ allora $\exists \min A$ e $\max A$

A è ordinato

ovvero gli insiemi finiti hanno min e max

Controesempio $A = \{ \frac{1}{n} : n \geq 1 \ n \in \mathbb{N} \}$

$\nexists \min A$

$\max A = 1$

<u>dim</u>

$\boxed{\max A = 1}$ infatti $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ $\frac{1}{n} \leq 1$

$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ $1 \leq n$

$\boxed{\nexists \min A}$ si procede per assurdo

Suppongo che $\bar{a} = \min A$

$\bar{a} \in A$ dunque $a = 1/\bar{n}$ per un certo $\bar{n} \in \mathbb{N}$

Ma $\frac{1}{\bar{n}} > \frac{1}{\bar{n}+1}$ (infatti $\bar{n}+1 > \bar{n}$)

e dunque ho trovato $\frac{1}{\bar{n}+1} \in A$

e $\frac{1}{\bar{n}+1} < \frac{1}{\bar{n}} = \min A$ ASSURDO $\lightning$

<u>Oss</u> $\nexists \min A \Rightarrow A$ non è finito

<u>Oss</u> 0 ha qualche significato per l'insieme
$A = \{1/n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$

<u>Def</u> m_A = minoranti di A
$= \{b \in \mathbb{R} : b \le a \ \forall a \in A\}$

Dato $A \neq \emptyset$ M_A = maggioranti di A
$= \{b \in \mathbb{R} : a \le b \ \forall a \in A\}$

<u>Def</u> $\Lambda = \sup A$ se $\Lambda = \min M_A$

Dato $A \neq \emptyset$ $\lambda = \inf A$ se $\lambda = \max m_A$

Esempio

$A = \{1/n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ $M_A = [1, +\infty[$
$m_A =]-\infty, 0]$

e quindi

$\Lambda = \min M_A = \max A = 1$ $\lambda = \max m_A = 0$

$m_A =]-\infty, 0]$

Devo provare che 0 è minorante,
ovvero $0 < 1/n \quad \forall n$ (banalmente vero)

Devo provare che se $x > 0$ allora $x \notin m_A$

$\Longleftrightarrow$

se $x > 0$ allora $\exists n > 0 : \frac{1}{n} < x$

$\Longleftrightarrow$

se $x > 0$ allora $\exists n > 0 : 1 < nx$

$\Longleftrightarrow$

se $x > 0$ allora $\exists n > 0 : \frac{1}{x} < n$

vero, poiché $\mathbb{N}$ è illimitato superiormente

$\lightning$