Analisi Mat. 1 - Lezione n.ro 5 - Lunedì 14/10/2013

Titolo nota 10/10/2011

Def Permutazione di n oggetti
è una qualsiasi funzione biunivoca
$$f : \{1,2,\dots,n\} \longrightarrow \{1,2,\dots,n\}$$

$$P_n = n! = \begin{cases} 1 & , n=0 \\ (n-1)!\, n & , n>0 \end{cases}$$ ovvero $0! = 1$

Oss: ① P_n è il numero di disposizioni di n oggetti
② P_n è il numero dei possibili ordinamenti di n oggetti

Def Disposizione di k oggetti $\neq$ presi da un insieme di n oggetti con $0<k\leq n$
è una qualsiasi funzione iniettiva
$$f : \{1,2,\dots,k\} \longrightarrow \{1,2,\dots,n\}$$

Queste disposizioni vengono anche dette SENZA ripetizione (son tutti oggetti $\neq$)

$D_{n,k}$ = numero delle disposizioni (senza ripetizione) di k oggetti presi da un insieme di n oggetti

$$= n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\dots\cdot(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Oss $D_{n,n} = P_n = n!$ $\qquad D_{n,1} = \frac{n!}{(n-1)!} = 1$

Pb: In una corsa competono 20 corridori. Quante sono le possibili terne vincenti?

Soluzione

$n = 20$ $\quad$ $k = 3$ $\qquad$ $D_{20,3} = 20 \cdot 19 \cdot 18 = \dfrac{20!}{17!}$

$\sqcup_{1°}$	$\sqcup_{2°}$	$\sqcup_{3°}$
20	19	18

Pb. Data la parola

AMORE

quanti anagrammi ne posso fare?
(contando pure quelli che non hanno significato nella lingua italiana)

Sono 5 lettere $\neq$ $\qquad$ $120 = 5! = P_5$

Pb: Data la parola

MATEMATICA

quanti anagrammi ne posso fare?
(contando pure quelli senza significato nella lingua italiana)

10 lettere

M ripetuta 2 volte
T " 2 volte
A " 3 "

n.ro anagrammi $\dfrac{10!}{2!\,2!\,3!}$

Def Disposizione (con ripetizione) di k oggetti presi da un insieme di n oggetti è una qualsiasi funzione

$$f : \{1, 2, \dots, k\} \longrightarrow \{1, 2, \dots, n\}.$$

$D^r_{n,k}$ = numero delle disposizioni (con ripetizione) di k oggetti presi da un insieme di n oggetti

$= k^n$

Def. Combinazione di k oggetti $\neq$ presi da un insieme di n oggetti con $0 < k \leq n$ è una qualsiasi funzione crescente strettamente

$$f : \{1, 2, \dots, k\} \longrightarrow \{1, 2, \dots, n\}$$

Quante sono le combinazioni di k oggetti presi da un insieme di n?

Osserviamo che le disposizioni $D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$

Detto

$C_{n,k}$ = n.ro delle combinazioni di k oggetti presi da un insieme di n oggetti

certamente $D_{n,k} \geq C_{n,k}$

Teorema $f: A \to B$ $A, B \subseteq \mathbb{R}$

Se f è strettamente crescente

allora f è iniettiva

dim

Tesi $x, y \in A$ $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

Hip. $x < y$ $x, y \in A \Rightarrow f(x) < f(y)$

f è crescente

$$x \neq y \begin{cases} x < y \Rightarrow f(x) < f(y) \Rightarrow f(x) \neq f(y) \\ x > y \Rightarrow f(x) > f(y) \Rightarrow f(x) \neq f(y) \end{cases}$$

dunque f è iniettiva

Pb: Se $f: A \to B$ è iniettiva allora f è strettamente crescente?

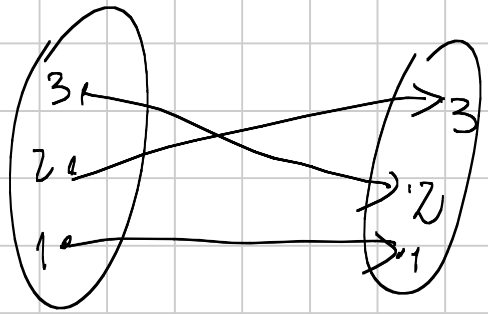
FALSO

Per negare questa proposizione costruisco un esempio opportuno

Controesempio (Iniettività $\not\Rightarrow$ monotonia)

$A = \{1, 2, 3\}$ $B = A = \{1, 2, 3\}$

$f: A \to B$ $f(1) = 1$ $f(2) = 3$ $f(3) = 2$



f è iniettiva (biiettiva)

però

$2 < 3$ e $f(2) = 3 > f(2)$

dunque non è monotona crescente

$1 < 2$ e $f(1) = 1 < f(2) = 3$

dunque non è monotona decrescente

Quante sono le combinazioni di k oggetti presi da un insieme di n oggetti $\equiv C_{n,k}$?

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} C_{n,k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} & 0 \le k \le n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\# A \equiv$ n.ro di elementi di A

$\# A = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(A) = \{\phi\}$ & $\# \mathbb{P}(A) = 1 = 2^0$

$C_{0,0} = 1 = \dfrac{0!}{0!\,0!}$ n.ro sottoinsiemi con 0 el.ti da un insieme di 0 el.ti

$1 = 2^0 = C_{0,0} = \# \mathbb{P}(A)$

$\# A = \#\{a\} = 1 \Rightarrow \mathbb{P}(A) = \{\phi, \{a\}\}$ e $\# \mathbb{P}(A) = 2 = 2^1$

$C_{1,0} = 1$

$C_{1,1} = 1$

$C_{1,0} + C_{1,1} = \# \mathbb{P}(A)$
$\quad \parallel$
$\quad 2 = 2^1$

$\# A = \#\{a_1, a_2\} = 2 \Rightarrow \mathbb{P}(A) = \{\phi, \{a_1, a_2\}, \{a_1\}, \{a_2\}\}$

& $\# \mathbb{P}(A) = 4 = 2^2$

$C_{2,0} = 1$

$C_{2,1} = 2 \overset{\text{Verificato}}{=} \dfrac{2!}{1!\,1!}$

$C_{2,2} = 1 \overset{\text{Verificato}}{=} \dfrac{2!}{2!\,0!}$

$C_{2,0} + C_{2,1} + C_{2,2} = 4 = 2^2 = \# \mathbb{P}(A)$

$$\#A = \#\{e_1, e_2, e_3\} = 3 \Rightarrow \mathbb{P}(A) = \{\phi, \{e_1\}, \{e_2\}, \{e_3\}, \{e_1, e_2\}$$
$$\{e_1, e_3\} \{e_2, e_3\} \{e_1 e_2 e_3\}\}$$

$$e \quad \#\mathbb{P}(A) = 8 = 2^3$$

$$C_{3,0} = 1$$

$$C_{3,1} = 3 = \frac{3!}{1!\,2!}$$

$$C_{3,2} = 3 = \frac{3!}{2!\,1!}$$

$$C_{3,3} = 1 = \frac{3!}{3!\,0!}$$

$$C_{3,0} + C_{3,1} + C_{3,2} + C_{3,3} = 8 = 2^3 = \#\mathbb{P}(A)$$

Teorema

$$\#A = n \Rightarrow \#\mathbb{P}(A) = 2^n$$

dim

$\#A = 0$ (ovvero $A = \phi$) allora $\mathbb{P}(A) = \{\phi\}$

allora $\#\mathbb{P}(A) = 1 = 2^0$

dunque è vero per $n=0$ (base dell'induzione)

Suppongo che $\#A=n \Rightarrow \#\mathbb{P}(A)=2^n$

(Ipotesi induttiva)

Voglio provare che $\#A=n+1 \Rightarrow \#\mathbb{P}(A)=2^{n+1}$

$A=\{a_1,a_2,\dots,a_{n+1}\}=B\cup\{a_{n+1}\}$ $\qquad \#B=n$

$\Omega\subseteq A$,

1° caso $a_{n+1}\notin\Omega \Rightarrow \Omega\subseteq B$ $\qquad$ Hip. Indutt.

$\Rightarrow \Omega\in\mathbb{P}(B)$ ma $\#\mathbb{P}(B)=2^n$

di questi Ω ne trovo 2^n

2° caso $a_{n+1}\in\Omega=C\cup\{a_{n+1}\}$

dove $C\subseteq B \Rightarrow C\in\mathbb{P}(B)$

ma $\#\mathbb{P}(B)=2^n$

e di questi insiemi C ne trovo 2^n

dunque di questi " Ω " " 2^n

$2^n+2^n=2^{n+1}=\#\mathbb{P}(A)$

Triangolo di Tartaglia (Pascal)

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & & & & \dots & & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
 & & & & \dots & & & &
\end{array}
$$

Teorema (Proprietà $\binom{n}{k}$)

1) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \{0, \dots, n\}$

3) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \quad 0 \leq k < n$

dim: per verifica diretta

1) $\binom{n}{0} = \dfrac{n!}{0!\,n!} = 1 = \dfrac{n!}{n!\,(n-n)!} = \dfrac{n!}{n!\cdot 0!} = \binom{n}{n}$

2) $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} = \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!} = \dfrac{n!}{(n-k)!\,(n-(n-k))!}$

$= \binom{n}{n-k}$

3) $$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}+\frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!}$$

$$=\frac{n!\,(k+1)+n!\,(n-k)}{(k+1)!\,(n-k)!}=\frac{n!\,(n-k+k+1)}{(k+1)!\,(n-k)!}$$

$$=\frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n+1-(k+1))!}=\binom{n+1}{k+1}$$

Teorema (Binomio di Newton)

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

$\forall n\in\mathbb{N}\quad\forall a,b\in\mathbb{R}$

Oss

$n=0\quad (a+b)^0=1 \overset{\checkmark}{=} \sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k}a^{0-k}b^k$

$$=\binom{0}{0}a^0b^0=1$$

$n=1\quad (a+b)^1=a+b \overset{\checkmark}{=} \sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}a^{1-k}b^k$

$$=\binom{1}{0}a\cdot b^0+\binom{1}{1}a^0\cdot b^1$$

$$=a+b$$

$n=2$ $\quad (a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2+2ab+b^2 \checkmark = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} a^{2-k} b^k$

$$= \binom{2}{0} a^2 b^0 + \binom{2}{1} a^1 b^1 + \binom{2}{2} a^0 b^2$$

$$= a^2 + 2ab + b^2$$

<u>dim</u>

$n=0$ è vero (vedi sopra) Base Induzione

Suppongo sia vero per n $\quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

Voglio provare $\quad (a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k$

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n \overset{\text{Ip. Indutt.}}{=} (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}$$

$$= \binom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} + \binom{n}{n} b^{n+1}$$

$$\downarrow_{k=h} \qquad\qquad \downarrow_{k+1=h}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{h=1}^{n} \binom{n}{h} a^{n+1-h} b^h + \sum_{h=1}^{n} \binom{n}{h-1} a^{n-(h-1)} b^h + b^{n+1}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{h=1}^{n} \left[\binom{n}{h} + \binom{n}{h-1}\right] \cdot a^{n+1-h} b^{h} + b^{n+1}$$

$$= \binom{n+1}{0} a^{n+1} b^{0} + \sum_{h=1}^{n} \binom{n+1}{h} a^{n+1-h} b^{h} + \binom{n+1}{n+1} a^{0} b^{n+1}$$

$$= \sum_{h=0}^{n+1} \binom{n+1}{h} a^{n+1-h} b^{h}$$

OSS

Binomio Newton

$$(1+1)^n = 2^n = \sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h} 1^{n-h} 1^{h} =$$

$$= \sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h}$$

n.ro sottoinsiemi di un insieme A con $\#A = n$

$$= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n}$$

numero sottoinsiemi $\emptyset$ el.ti

n.ro sottoins. 1 elemento

n.ro sottoinsiemi di 2 el.ti

OSS

$$\sum_{h=0}^{n} (-1)^{h} \binom{n}{h} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots$$

$$= 0$$

$$\sum_{h=0}^{100} (-1)^{h} \binom{100}{h} = 0$$

$$(1-1)^n = 0 = \sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h} (-1)^{h} 1^{n-h}$$

$$\text{Probabilità (finità)} = \frac{\text{casi favorevoli (numero)}}{\text{casi possibili (numero)}}$$

Oss: Se un evento E per verificarsi chiede il verificarsi di 2 eventi tra loro indipendenti E_1 ed E_2

allora $P(E) = P(E_1) \cdot P(E_2)$

Lancio 2 dadi

Probabilità che esca 3

$$P(3) = P(1)P(2) + P(2)P(1)$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \frac{1}{6} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

Casi favorevoli $= 2$ $\qquad$ $2/36 = 1/18$

Casi possibili $= 6 \times 6$

Esempio Lanciando 1 dado, quale è la probabilità che

1. Esca il numero 1
2. " un numero pari ?
3. " " " divisibile per 3 ?

$$\sum_{h=1}^{3} (2h+1) = (2\cdot 1+1) + (2\cdot 2+1) + (2\cdot 3+1)$$

$$\sum_{k=1}^{3} (2k+1) = (2\cdot 1+1) + (2\cdot 2+1) + (2\cdot 3+1)$$

$k+1 = i$

$k=1 \rightarrow i=2$

$k=2 \rightarrow i=3$

$k=3 \rightarrow i=4$

$$\sum_{i=2}^{4} \left(2(i-1)+1\right) = \sum_{i=2}^{4} (2i-1) = (2\cdot 2-1) + (2\cdot 3-1) + (2\cdot 4-1)$$

=

$$\underbrace{P(\text{mia bomba})}_{=1} P(\text{altra bomba}) = P(\text{altra bomba})$$

Esercizio Lanciando 2 dadi, e sommando i due numeri, qual è il risultato che esce con maggior probabilità?

dim

6 uscite $\times$ 6 uscite $=$ 36 casi possibili

$\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\} \equiv$ risultati possibili

2	esce	in	1 modo	$P(2) = 1/36$	$= P(12)$
3	"	"	2 modi	$P(3) = 1/18$	$= P(11)$
4	"	"	3 "	$P(4) = 1/12$	$= P(10)$
5	"	"	4 "	$P(5) = 1/9$	$= P(9)$
6	"	"	5 "	$P(6) = 5/36$	$= P(8)$
$\boxed{7}$	"	"	6 "	$P(7) = 1/6$	

Esercizio Qual è la probabilità di fare 6 al Superenalotto?

1° modo

$$P(1^\circ \text{ numero}) = 1/90$$

$$P(2^\circ \text{ "}) = 1/89$$

$$P(3^\circ \text{ "}) = 1/88$$

$$\ldots$$

$$P(6 \text{ numeri}) = P(1^\circ)P(2^\circ)P(3^\circ)P(4^\circ)P(5^\circ) + P(1^\circ)P(2^\circ)P(3^\circ)P(5^\circ)P(4^\circ) + \ldots$$

$$= \frac{6!}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}$$

2° Modo: Quanti sono i sottoinsiemi di 6 elementi presi da un insieme di 90 elementi?

$$\binom{90}{6} = \frac{90!}{6!\,(90-6)!} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{6!}$$

Questi sono i casi favorevoli

$$P(\text{Evento}) = \frac{\overset{1 \text{ sestina}}{1}}{\underset{\text{Tutte le sestine}}{\binom{90}{6}}} \simeq 1{,}6 \times 10^{-9}$$

N.B.: I premi nobel sono ogni anno 13–14

La popolazione della Terra è 7×10^9

$$P(\text{vincere nobel}) \cong \frac{14}{7 \times 10^9} = 2 \times 10^{-9}.$$

ovvero è più probabile vincere un nobel

Esercizio: Quanti sono i numeri di 4 cifre con le cifre in ordine strettamente crescente?

4321 ok $\qquad$ 7650 ok

~~4213~~ NON VA BENE

$\{0,1,2,3,\dots,9\}$ $\qquad$ $f: \{1,2,3,4\} \longrightarrow \{0,1,\dots,9\}$ crescenti

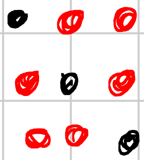
$$C_{10,4} = \binom{10}{4} = \frac{10!}{4!\,6!}$$

Esercizio: In quanti modi posso disporre $(n+2)$ elementi (palline)
- n nere
- 2 rosse

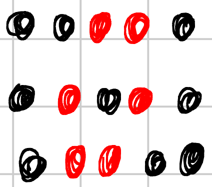
in modo che la prima e l'ultima siano nere

dim.

$n=0$  IMPOSSIBILE

$n=1$  IMPOSSIBILE

$n=2$  1 MODO $\left\{ \binom{2}{2} = 1 \right.$

$n=3$  3 MODI $\left\{ \binom{3}{2} = 3 \right.$

2 palline rosse $n-2$ palline nere

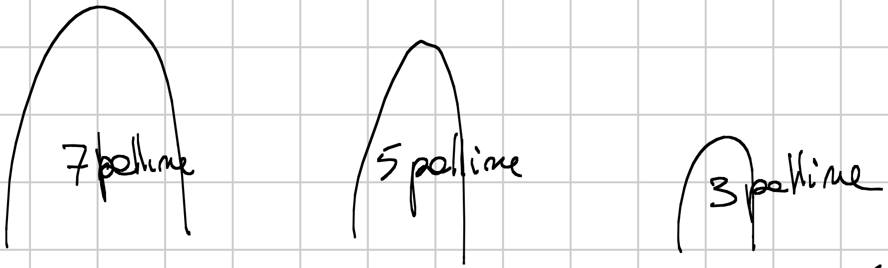
$n > 3$

(2 palline rosse) + ($n-2$ palline nere) $\equiv$ n palline

$$\frac{n!}{2!\,(n-2)!} = \binom{n}{2}$$

Problema

Date 15 palline $\neq$, in quanti modi posso formare un mucchio di 5, uno di 7 ed uno di 3 palline?

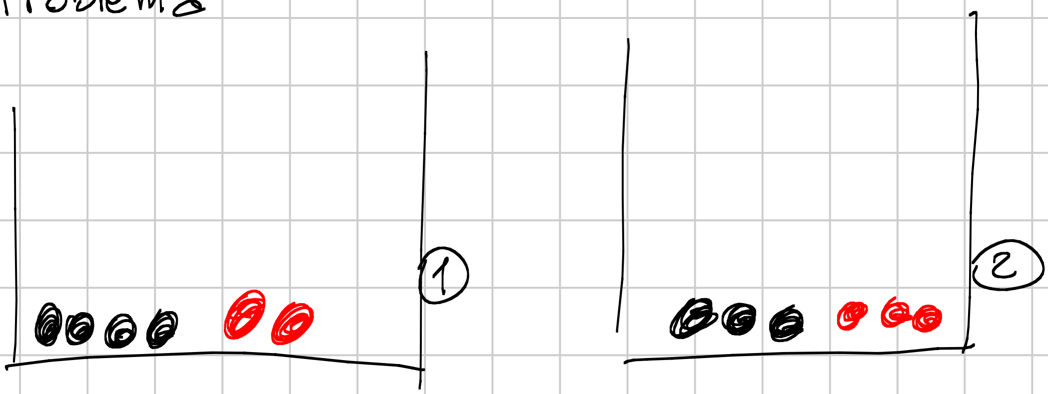


$$\binom{15}{7}\binom{8}{5}\binom{3}{3} = \frac{15!}{7!\,\cancel{8!}}\,\frac{\cancel{8!}}{5!\,3!}$$

$$\binom{15}{5}\binom{10}{7}\binom{3}{3} = \frac{15!}{5!\,\cancel{10!}}\,\frac{\cancel{10!}}{7!\,3!}$$

$$\binom{15}{3}\binom{12}{5}\binom{7}{7} = \frac{15!}{3!\,\cancel{12!}}\,\frac{\cancel{12!}}{5!\,7!}$$

Problema



Pescando 2 palline da ciascuna urna

1) Quale è la probabilità che siano tutte nere

2) Quale è la probabilità che siano 2 rosse e 2 nere

1) $P_{1^a urna}(\text{NERA}) = \frac{4}{6}$ $\quad P_{1^a}(\text{NERA}) = \frac{3}{5}$

$P_{2^a urna}(\text{NERA}) = \frac{3}{6}$ $\quad P_{2^a}(\text{NERA}) = \frac{2}{5}$

$$\frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{6}} \cdot \frac{\cancel{3}}{5} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{6}} \cdot \frac{\cancel{2}}{5} = \frac{2}{25}$$

1ª	2°	
NN	RR	$\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}=0{,}08$
NR	NR	$\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}=0{,}08$
NR	RN	$\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}=0{,}08$
RN	NR	$\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}=0{,}08$
RN	RN	$\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}=0{,}08$
RR	NN	$\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\simeq 0{,}066$

$\simeq 0{,}466$

Esercizio

$$f(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\qquad n\geq 1\quad n\in\mathbb{N}$$

Provare che $f(n)$ è decrescente!

(Suggerimento: si veda la dimostrazione ove si prova che $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ è crescente