

Principio di Induzione (completa)

$$S \subseteq \mathbb{N} \quad \begin{array}{l} \text{(i) } 0 \in S \\ \text{(ii) } m \in S \Rightarrow (m+1) \in S \end{array} \Rightarrow S = \mathbb{N}$$

oppure

$$S \subseteq \mathbb{N} \quad \begin{array}{l} \text{(i) } m_0 \in S \\ \text{(ii) } m \in S \Rightarrow (m+1) \in S \end{array} \Rightarrow S = \{m \in \mathbb{N} : m \geq m_0\}$$

Osservazione: ci sono due pb $\neq$

a) determinare l'espressione di una funzione $f(n)$ quando se ne

conoscano solo un numero finito di valori

b) provare che $f(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$
(qui si usa il principio di induzione)

Esercizio: $f(n) = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

Calcolare $f(n)$

dim

Si osserva che $f(n) = f(n-1) \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = f(n-1) \cdot \frac{n^2-1}{n^2}$

$$f(2) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = \frac{2+1}{2 \times 2}$$

$$f(3) = f(2) \cdot \frac{8}{9} = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} = \frac{2}{3}$$

$$f(4) = f(3) \cdot \frac{15}{16} = \frac{5}{8} = \frac{4+1}{2 \times 4}$$

$$f(5) = f(4) \cdot \frac{24}{25} = \frac{3}{5} = \frac{5+1}{2} \cdot \frac{1}{5}$$

$$f(6) = f(5) \cdot \frac{35}{36} = \frac{7}{12} = \frac{6+1}{2 \times 6}$$

$$f(7) = f(6) \cdot \frac{48}{49} = \frac{4}{7}$$

Congettura: $f(n) = \frac{n+1}{2n} \quad \forall n \geq 2 \quad (*)$

Resta da provare per induzione che

$(*)$ è vera

$f(2)$ è vera

Si suppone che $f(n) = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$

$$f(n+1) = f(n) \cdot \frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2} = \frac{\cancel{n+1}}{2n} \cdot \frac{n^2+2n}{(n+1)\cancel{n}} = \frac{n+2}{2(n+1)}$$



Disuguaglianza di Bernoulli

$$\boxed{\forall x > -1} \quad (1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

dim.

NOTO che $1+x$ deve sempre essere > 0

es $n=5$ e $x=-4$, la disuguaglianza non vale
(provare)

Si dimostra per induzione su n

$$n=0 \quad (1+x)^0 = 1 \geq 1+0 \cdot x \quad \text{vera}$$

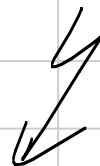
Suppongo che valga per n $(1+x)^n \geq 1+nx$
(hip. induttiva)

Voglio provare che vale per $n+1$

$$(1+x)^{n+1} = (1+x) \cdot (1+x)^n \stackrel{\text{hip. induttiva}}{\geq} (1+x)(1+nx)$$

$$= 1 + (n+1)x + nx^2$$

$$\geq 1 + (n+1)x$$



Esercizio

$\forall n \geq 1$ $f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Proverò che

$$f(n) < f(n+1) \quad \forall n \geq 1$$

dim.

$$f(1) = (1+1)^1 = 2 < f(2) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$f(2) = \frac{9}{4} < f(3) = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27}$$

$$\left(1 + \frac{1}{10^6}\right)^{10^6} < \left(1 + \frac{1}{10^6+1}\right)^{10^6+1}$$

Suppongo che $f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = f(n+1)$

Devo provare $f(n+1) = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < \left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^{n+2} = f(n+2)$

$$\S f(n+1) = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} < \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{n+2} = f(n+2)$$

$$\S \left(\frac{n+1}{n+2}\right) \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} < \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{n+2}$$

$$\S \left(\frac{n+1}{n+2}\right) < \left[\frac{(n+3)(n+1)}{(n+2)^2}\right]^{n+2}$$

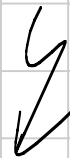
$$\S \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) < \left[\frac{n^2 + 4n + 3}{(n+2)^2} \right]^{n+2}$$

$$\S \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) < \left[\frac{(n+2)^2 - 1}{(n+2)^2} \right]^{n+2}$$

$$\S \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) < \left[1 - \frac{1}{(n+2)^2} \right]^{n+2}$$

On vérifie que $\left[1 - \frac{1}{(n+2)^2} \right] > -1$ donc

$$\left[1 - \frac{1}{(n+2)^2} \right]^{n+2} \underset{\uparrow \text{Bernoulli}}{\geq} 1 - \frac{1}{n+2}$$



Assioma del minimo intero (o del buon ordinamento)

$$[5'') S \subseteq \mathbb{N} \quad S \neq \emptyset \Rightarrow \exists \min S]$$

Def A insieme ordinato, un punto $\bar{a} \in A$
si dice "minimo di A" se $\bar{a} \leq a \quad \forall a \in A$

Teorema

Assioma minimo intero $\Rightarrow$ Principio di induzione

dim

Nego il principio di induzione $\left(\begin{array}{l} (i) \\ (ii) \end{array} \Rightarrow S = \mathbb{N} \right)$

Dunque esiste $S \subseteq \mathbb{N} \quad \forall c.$

$$(i) 0 \in S$$

$$(ii) n \in S \Rightarrow (n+1) \in S$$

$$\text{e } S \neq \mathbb{N}$$

$$\text{se } B = \mathbb{N} \setminus S \neq \emptyset$$

$\swarrow$ Principio minimo intero
 $\forall B \neq \emptyset, B \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow \exists \underline{\underline{b = \min B}}$

Osservo che $b \neq 0$ ($0 \in S!$)

$$\text{dunque } \exists (b-1) \in S$$

Pero S è induttivo, e $(b-1) \in S$ allora $(b-1)+1 = b \in S$
ASSURDO ∇

Oss: vale anche il viceversa (facile)

Axioma Minimo Intero $\Rightarrow$ Principio Induzione

(Teorema) Osservazione

Sia dato $\underbrace{A \subseteq \mathbb{R}}$, e si consideri una
funzione $\underbrace{f: A \rightarrow A}$ ed $a \in A$

Allora risulta ben definita $g: \mathbb{N} \rightarrow A$

$$\begin{cases} g(0) = a \\ g(n+1) = f(g(n)) \end{cases}$$

dim

$g(0) = a$ è ben definita

$g(1) = f(g(0)) = f(a)$ è ben definita

Hp induttiva $\exists g(n) \in A$ Vero per n

$g(n+1) = f(g(n))$ è ben definita in

quanto $g(n) \in A$ $\hookrightarrow$

Corollario

Sia $f: \mathbb{N} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e si fissa $a \in \mathbb{R}$

Allora le formule
$$\begin{cases} g(0) = a \\ g(m) = f(m, g(m)) \end{cases}$$

definisce una funzione $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

dim

Problema

Dato l'insieme $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$

quante sono le funzioni biettive $f: A \rightarrow A$?

Def $f: A \rightarrow B$ è una funzione

- iniettiva $\Leftrightarrow \forall x, y \in A \quad x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$
- suriettiva $\Leftrightarrow \forall y \in B \quad \exists x \in A : f(x) = y$
- biettiva (biettiva) $\Leftrightarrow \forall y \in B \quad \exists! x \in A : f(x) = y$

Esempio

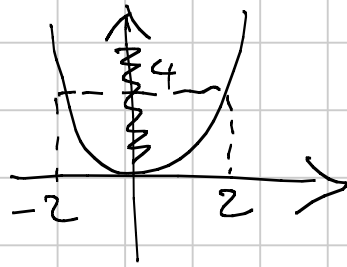
$f(x) = \sqrt{x}$ $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

questa è iniettiva ma non suriettiva



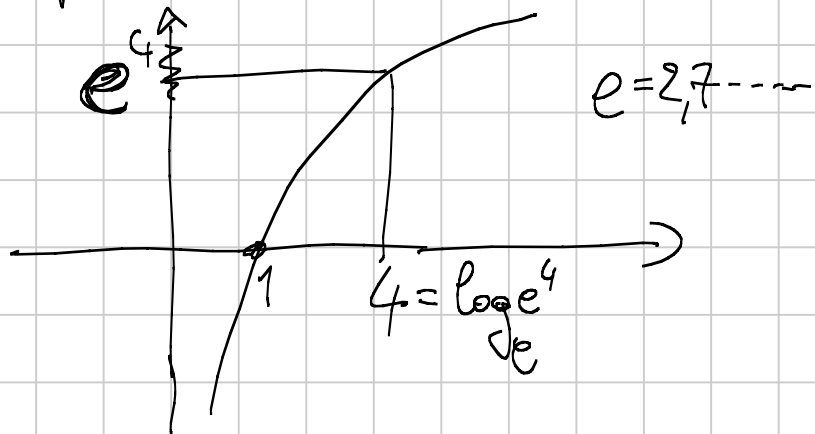
Esempio $f(x) = x^2$ $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$

f è suriettiva ma non è iniettiva



Esempio $f(x) = \log x$ $f:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

è una f. ne biiettiva



$f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ biiettiva

Quante ce ne sono?

$n=3$ 1° $\square_1 \leftarrow$ per riempire 1, ho 3 possibilità
 2° $\square_2 \leftarrow 2$
 3° $\square_3 \leftarrow 1$

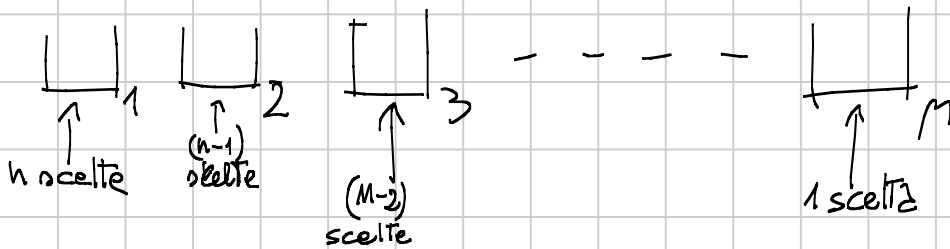
Quante sono, se $n=3$? $6 = 3 \cdot 2 \cdot 1$

$n=10$ 1° $\square_1 \leftarrow 10$
 2° $\square_2 \leftarrow 9$ $10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot$
 ⋮ ⋮ $\cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$
 10° $\square_{10} \leftarrow 1$

Osservo che quando passo da n a $n+1$

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1)$$

Pb: Dati n oggetti, in quanti modi
≠ li posso disporre?



$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Diciamo Permutazione di n oggetti

è una f.ue biettiva $f: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$

Problema

In quanti modi posso smazzare un mazzo
di 52 carte?

$$52!$$

Fattoriale di n

$$n! = \begin{cases} 1 & n=0 \\ (n-1)! \cdot n & n>0 \end{cases}$$

$$n! = P_n \equiv \text{numero di permutazioni di } n \text{ oggetti}$$

Esempio 3 oggetti $\{1, 2, 3\}$

1 2 3

2 1 3

3 1 2

1 3 2

2 3 1

3 2 1

4 oggetti

1 2 3 4

2 1 3 4

3 1 2 4

4 1 2 3

1

2

3

4

1

2

3

4

1

2

3

4

1

2

3

4

1

2

3

4

DISPOSIZIONI

Pb. Dato un mazzo di 52 carte, in quanti modi posso darvi 5 carte?
(Tenendo conto dell'ordine di arrivo)

$$\underline{52}_1 \quad \underline{51}_2 \quad \underline{50}_3 \quad \underline{49}_4 \quad \underline{48}_5$$

$$52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 = \frac{52!}{47!}$$

Pb: Dato l'insieme $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
e l'insieme $B = \{1, 2, 3, \dots, 52\}$

Quante sono le f. iniettive $f: A \rightarrow B$?

$$\frac{52!}{47!}$$

Def Diciamo Disposizione di k

oggetti presi da un insieme di n

oggetti una qualsiasi funzione

$$f: \{1, 2, \dots, k\} \longrightarrow \{1, 2, \dots, n\}$$

iniettiva

$$k \leq n$$

Numero delle disposizioni di k oggetti
presi da n oggetti

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$$

Om $D_{n,n} = P_n = n!$

DISPOSIZIONI
con
Ripetizione

Pb Quanti numeri ^{di 5 cifre} ~~posso~~ formare
con $\{1, 2, 3, 4\}$?

$$\boxed{4} \boxed{4} \boxed{4} \boxed{4} \boxed{4} = 4^5$$

Pb Quante ^{solte} funzioni da $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$\text{a } B = \{1, 2\}$$

?

$$\boxed{2^5}$$

Def disposizione con ripetizione

di k oggetti presi da un insieme

di n oggetti, è una funzione

$$f: \{1, 2, \dots, k\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$$

In questo caso k ed n non devono essere legati tra loro

Numero delle disposizioni con ripetizione

di k oggetti presi da un insieme di n

oggetti

$$n^k = \sum_{k, n} n^k$$

Pd Quanti sono i sottoinsiemi
di 2 elementi presi da un insieme
di 5 " ?

→ sottoinsiemi di 0 el., quanti sono? 1, il vuoto $\emptyset$

→ " " 1 " " " ? 5, i singoli

→ " " 5 " " " ? 1, l'insieme

$$D_{5,2} \cdot \frac{1}{2!} = \frac{5!}{3!} \cdot \frac{1}{2!} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \binom{5}{2} = C_{5,2}$$

n. 20
combinazioni

Prendo C con 3 el. T.

$C = \{\square, \Delta, \circ\}$, in quanti modi li posso permutare?

$\square \Delta \circ$

$\Delta \square \circ$

$\square \circ \Delta$

$\Delta \circ \square$

$\circ \square \Delta$

$\circ \Delta \square$

$P_3 = 6 \equiv \text{n.ro permutazioni di 3 oggetti}$

$P_4 = 24 \equiv \text{n.ro permutazioni di 4 oggetti}$

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$$

Example

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \quad D_{4,1} = 4 \quad \boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}, \boxed{4}$$

$$D_{4,2} = 12 \quad \boxed{1/2} \quad \boxed{1/3} \quad \boxed{1/4} \\ \boxed{2/3} \text{ etc}$$

$$D_{4,3} = 24 \quad \boxed{1/2/3} \text{ --- etc}$$

$$D_{4,4} = 24 = P_n$$

Ques $D_{n,n} = n!$

Ps: Dat. 20 corridori in una gara
quante sono le possibili Terne di
vincitori

$$D_{20,3} = 20 \times 19 \times 18 = 6840 \\ = \frac{20!}{(20-3)!}$$

Ques Si tratta di occupare k corse

$\square_1 \square_2 \dots \square_k$
scegliendo gli occupanti da $A = \{1, \dots, n\}$

$$\left. \begin{array}{l} \square_1 = n \text{ scelte possibili} \\ \square_2 = (n-1) \text{ scelte possibili} \\ \dots \\ \square_k = (n-k+1) \text{ scelte possibili} \end{array} \right\} D_{n,k} = n(n-1) \dots (n-k+1)$$