Analisi Mat. 1 - Lezione n.ro 3 - Martedì 7/10/2013

Titolo nota 10/10/2011

Def: $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice intervallo se

$\forall x, y \in A$ con $x < y$ $\quad [x,y] = \{z : x \leq z \leq y\} \subseteq A$

$]1,3]$ è un intervallo $\quad]1,3] \cup \{4\}$ NON È un intervallo

Dato un insieme A

$$-A = \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\}$$

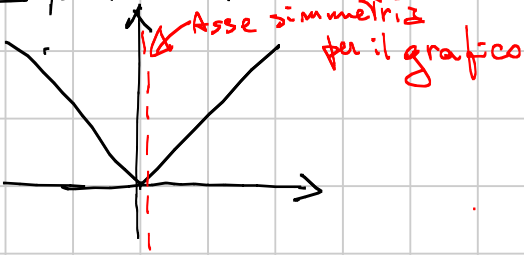
Esempio $A =]1,2] \Rightarrow -A = [-2,-1[$

Nota: se A è un intervallo simmetrico rispetto all'origine, ovvero $A =]-a,a[$ (oppure $A = [-a,a]$) allora $A = -A$

Def Sia A un intervallo simmetrico $f : A \to \mathbb{R}$ si dice "pari" se $f(x) = f(-x) \ \forall x \in A$

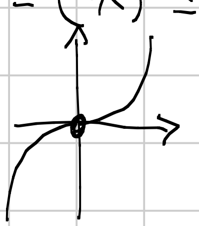
si dice "dispari" se $f(x) = -f(-x) \ \forall x \in A$

Esempio $f(x) = |x|$ è una f.ne PARI



Esempio $g(x) = x^3$ è una f.ne DISPARI

$$g(-x) = (-x)^3 = (-1)^3 \cdot x^3 = -x^3 = -g(x)$$



Esempio $h(x) = x^3 + 1$ non è pari, non è dispari

$h(0) = 1 \neq 0 \Rightarrow h$ non è dispari

$h(1) = 2 \neq 0 = h(-1)$ NON È PARI

Teorema A intervallo simmetrico, $f: A \to \mathbb{R}$ dispari $\Rightarrow f(0) = 0$

dim

$$f(0) = -f(-0) = -f(0) \Rightarrow f(0) = 0$$

Oss A simmetrico (intervallo) $\Rightarrow 0 \in A$

infatti se $\overset{0}{\hat{x}} \in A$ allora $-x \in A$

ed essendo A un intervallo $[-x, x] \subset A$

ma $0 \in [-x, x] \Rightarrow 0 \in A$

Determinare le soluzioni di

$$\left|\log_e |x|\right| > 10 \qquad x \neq 0$$

$\log_e |x| > 10$ ó $-\log_e |x| > 10$

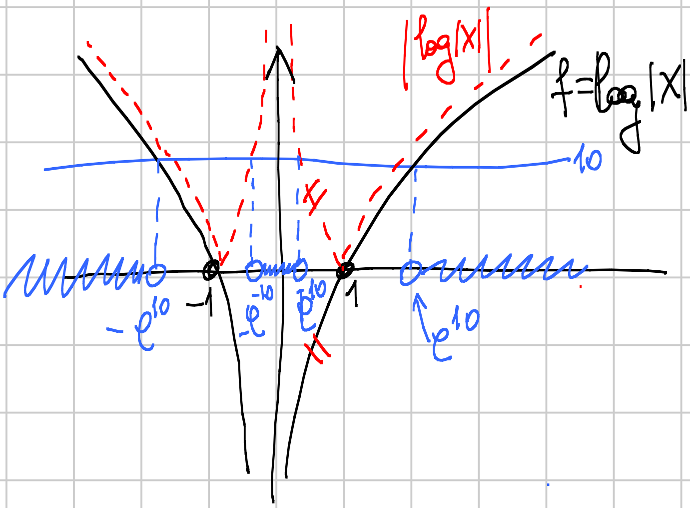
(*) $\Updownarrow$

$|x| > e^{10}$ ó $\log_e |x| < -10$

$\Updownarrow$

$\underbrace{x > e^{10}}$ ó $\underbrace{-x > e^{10}}$ ó $\underbrace{|x| < e^{-10}}$

$x \in]e^{10}, +\infty[$ ó $x \in]-\infty, -e^{10}[$ ó $x \in]-e^{-10}, 0[$ ó $x \in]0, e^{-10}[$



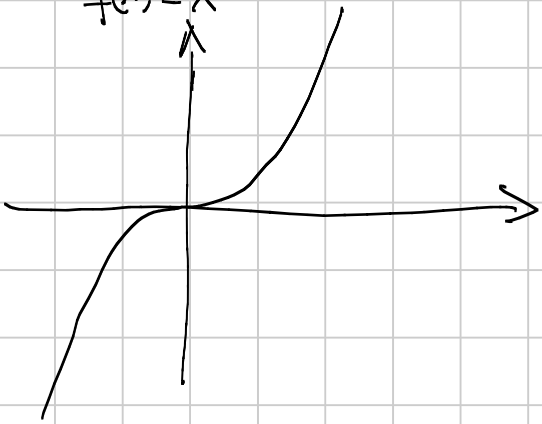
$\log |x| = \log_e |-x|$

Def $f: A \to \mathbb{R}$ si dice

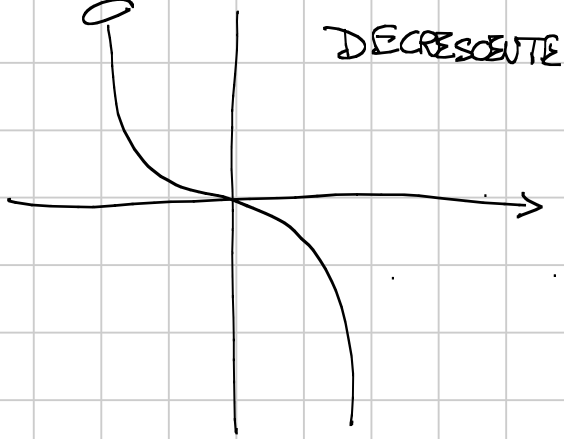
- monotona debolmente crescente se $\forall x,y \in A$ $\quad x<y \Rightarrow f(x) \le f(y)$
- " strettamente " se " $\quad x<y \Rightarrow f(x) < f(y)$
- " debolmente decrescente se " $\quad x<y \Rightarrow f(x) \ge f(y)$
- " strettamente " se " $\quad x<y \Rightarrow f(x) > f(y)$

Esempio

$f(x) = x^3$ STRETT. CRESCENTE



$g(x) = -x^3$ strett. DECRESCENTE



Esempio di funzione debolmente crescente

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ x^2 & x > 0 \end{cases}$$

Esempio f.ne debolmente decrescente

$$g(x) = \begin{cases} -x & x \leq 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

<u>Oss</u> $f: A \to \mathbb{R}$ monotona strettamente crescente allora

$\forall x, y \in A \quad x < y \iff f(x) < f(y)$

<u>Oss</u> $f: A \to \mathbb{R}$ monotona strettamente decrescente allora

$\forall x, y \in A \quad x < y \iff f(x) > f(y)$

"Una funzione strettamente crescente (decrescente) conserva (inverte) l'ordine"

Esempio

$A = \{1, 2, 3\} \qquad f: A \to \mathbb{R} \qquad f(x) = x^3$

$f(A) = \{1^3, 2^3, 3^3\} = \{1, 8, 27\}$

Questa è l'osservazione che permette di determinare tutte le soluzioni di

$$25^{2x^2-4} > 5^{10-2x^2-12x} = 5^{2(5-x^2-6x)}$$

$$\Updownarrow$$

$$25^{2x^2-4} > 25^{5-x^2-6x}$$

$f(y) = 25^y$ è strett. crescente

$$\Updownarrow$$

$$f(2x^2-4) > f(5-x^2-6x)$$

$$\Updownarrow \quad (***)$$

$$2x^2-4 > 5-x^2-6x$$

$$3x^2+6x-9 = 3(x^2+2x-3) = 3(x+3)(x-1) > 0$$

$$x \in \,]-\infty, -3[\, \cup \,]1, +\infty[$$

Esercizio 5. Sia S l'insieme delle soluzioni della disequazione $\log(x+1)+\log(x-2) \leq \log 10$. Allora

(A) $]2,4[\subset S$.

(B) $]-3,-1[\subset S$.

(C) $]-1,2[\subset S$.

(D) S non è limitato superiormente.

$$\log(x+1)+\log(x-2) \leq \log 10$$

$$\begin{cases} x+1>0 \\ x-2>0 \end{cases} \quad \begin{cases} x>-1 \\ x>2 \end{cases} \Rightarrow \quad C.E. =]2,+\infty[$$

$$\log (x+1)(x-2) \leq \log 10$$

$$\Updownarrow \; ***$$

$\log(y)$ è una funzione CRESCENTE

$$(x+1)(x-2) \leq 10$$

$$x^2-x-12 \leq 0 \qquad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2} \begin{cases} 4 \\ -3 \end{cases}$$

$$(x-4)(x+3) \leq 0$$

$$[-3,4]$$

SOLUZIONE $[-3,4] \cap]2,+\infty[=]2,4]$

Definizione assiomatica di $\mathbb{N}$ (PEANO)

1) 0 è un numero naturale (ovvero $0 \in \mathbb{N}$).

2) $n \in \mathbb{N} \Rightarrow (n+1) \in \mathbb{N}$ (successore).

3) $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \neq m \Rightarrow n+1 \neq m+1$ (numeri $\neq \Rightarrow \neq$ successore)

4) $0 \neq n+1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (zero non è successore di nulla)

5) $S \subseteq \mathbb{N}$ t.c. (i) $0 \in S$; (ii) $n \in S \Rightarrow n+1 \in S$ $\quad \Rightarrow S \equiv \mathbb{N}$

Assioma (Principio) di induzione COMPLETA

Esercizio

Calcolare $1+3+5+7+\dots+101$

È la somma dei primi 101 n.ri dispari!

$1 = 1^2$.
$1+3 = 4 = 2^2$.
$1+3+5 = 9 = 3^2$.
$1+3+5+7 = 16 = 4^2$
$1+3+5+7+9 = 25 = 5^2$

$1+3+5+\dots+101 = 51^2$

$$\begin{array}{l} 1+3+5+\dots+101 \\ 101+99+97+\dots+1 \\ \hline 102+\dots\dots+102 \end{array} \qquad S = \frac{102 \times 51}{2} = 51^2$$

Cerchiamo la soluzione di un pb. più complesso

Calcolare $1+3+5+ \cdots + (2n-1) + (2n+1) \overset{?}{=} (n+1)^2$

$S = \{ n : 1+3+5+ \cdots + (2n+1) = (n+1)^2 \}$

Osservo che $0 \in S$ $\quad 1 = (0+1)^2 = 1$

$1 \in S \quad 1+3 = (1+1)^2$

Suppongo che $n \in S$ ovvero $1 + \cdots + (2n+1) = (n+1)^2$

$\underbrace{1+2+ \cdots + (2n+1)} + \underset{2(n+1)+1}{(2n+3)} = (n+1)^2 + 2n+3 = n^2+2n+1 + 2n+3$

$= n^2+4n+4$

$= (n+2)^2$

allora $(n+1) \in S$

$\Longrightarrow S \equiv \mathbb{N}$

Problema:

è vero che $1+2+3+\cdots+1000 = \frac{1000 \times 1001}{2}$?

$$1+2+\cdots+10^{1000} = \frac{10^{1000} \times (10^{1000}+1)}{2}$$

Fare il calcolo esplicito è impraticabile!!

$$(*) \quad \boxed{1+2+3+4+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}} \; ?$$ (Astrazione)

Devo provare che (*) vale per ogni n

$n=1$ $\quad 1 = \frac{1\cdot(1+1)}{2}$? sì

$n=2$ $\quad 1+2 = \frac{2\cdot(2+1)}{2}$? sì

$$1+2 = \frac{1\cdot(1+1)}{2} + 2 = 1+2 = 3$$

$n=3$ $\quad \underbrace{1+2}+3 = 3+3 = 6 = \frac{3\cdot(3+1)}{2}$

Hip. induttiva $\quad \boxed{1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}}$ (suppongo sia vera)

Testo il caso $n+1$ $\quad$ Applico Hip induttiva

$$\boxed{\overbrace{1+2+\cdots+n}+(n+1)} = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \quad \text{è vero anche per } (n+1)$$

Pb. da dove arriva la FORMULA

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} = S$$

$$\begin{array}{cccccccccc}
1 & + & 2 & + & 3 & + \dots + & (n-1) & + & n \\
n & + & (n-1) & + & (n-2) & + \dots + & 2 & + & 1 \\
\hline
(n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + \dots + & (n+1) & + & (n+1)
\end{array} = \underbrace{(n+1)\cdot n = 2S}$$

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

Oss: Ci sono due problemi distinti

- trovare una formula che sia vera per ogni $n \in \mathbb{N}$: questo richiede una congettura, ovvero è necessario scrivere una nuova formula $f(n)$, indovinarne l'espressione
- provare che una identità, una disequazione, è vera: questo si fa con il principio di induzione (completa), ed è essenzialmente una verifica.

Oss Formulazione equivalente del Principio di Induzione:

$S \subseteq \mathbb{N}$ t.c. (i) $n_0 \in S$ $\Rightarrow S = \{n \geq n_0\}$

(ii) $n \in S \Rightarrow n+1 \in S$.

Esercizio: provare che $\quad 2^n > n^2+4 \quad \forall n \geq 5$

dim

$n=0 \quad 1 > 0+4$? NO

$n=1 \quad 2^1 > 1+4$? NO

$n=2 \quad 2^2 = 4 > 4+4=8$? NO

$n=3$ NO

$n=4 \quad 2^4 > 16+4$? NO

$n=5 \quad 2^5 = 32 > 25+4 = 29$? SI

Suppongo che $2^n > n^2+4$ (Hip. induttiva)

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \underset{\uparrow}{>} 2 \cdot (n^2+4) = \underbrace{2n^2+8 \overset{?}{>} (n+1)^2+4}$$

applico Hip. Induttiva

Devo provare che $2n^2+8 > (n+1)^2+4$

ovvero $\quad 2n^2 - n^2 - 2n - 1 + 8 - 4 > 0$

$\Updownarrow$

$$n^2-2n+3>0$$

Ma $\Delta = 1^2-3<0$, e dunque n^2-2n+3 è sempre vero, perciò la Tesi è provata

Notazione

$$1+2+3+\dots+100 = \sum_{K=1}^{100} K$$

$$\sum_{k=1}^{10} (K^2+1) = (1^2+1) + (2^2+1) + (3^2+1) + \dots + (10^2+1)$$

$$\sum_{k=2}^{5} 1 = \underset{k=2}{\underset{\uparrow}{1}} + \underset{k=3}{\underset{\uparrow}{1}} + \underset{k=4}{\underset{\uparrow}{1}} + \underset{k=5}{\underset{\uparrow}{1}} = 4$$

$$\sum_{k=n_0}^{n_0+6} f(k) = f(n_0) + f(n_0+1) + f(n_0+2) + f(n_0+3) + f(n_0+4) + f(n_0+5) + f(n_0+6)$$

Esercizio

Dimostrare che

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(2n^2+3n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

dim

Tesi $\quad 1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$n=2 \quad 1^2+2^2 = 5 = \dfrac{2(2+1)(2\cdot 2+1)}{6} = \dfrac{2\cdot 3\cdot 5}{6} = 5$ ✓

$n=3 \quad 1^2+2^2+3^2 = 14 = \dfrac{3\cdot(3+1)(2\cdot 3+1)}{6} = \dfrac{3\cdot 4\cdot 7}{6} = 14$ ✓

Suppongo $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (Hip. Induttiva)

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \underbrace{1+2^2+\dots+n^2}+(n+1)^2$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 \overset{\text{Hip. ind.}}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$= (n+1)\left[\frac{2n^2+n+6n+6}{6}\right] = \frac{n+1}{6}\cdot\left(2n^2+7n+6\right)$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)\left[(n+1)+1\right]\left[2(n+1)+1\right]}{6}$$

Esercizio Dimostrare che, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(2n^2+3n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0^2 = 0 \overset{!}{=} \frac{0\cdot(0+1)(2\cdot 0+1)}{6} = 0 \quad \checkmark$$

$$\sum_{k=0}^{1} k^2 = 0^2+1^2 = 1 \overset{?}{=} \frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6} = 1$$

$$\sum_{k=0}^{2} k^2 = 0^2+1^2+2^2 = 5 \overset{?}{=} \frac{2\cdot(2+1)(2\cdot 2+1)}{6} = 5$$

Dimostrazione

Vale per $n=0$ $\quad \sum_{k=0}^{0} k^2 = \frac{0(0+1)(2\cdot 0+1)}{6} \quad \checkmark$

Hip. induttiva supponiamo che la formula sia vera per n, cioè

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Dimostriamo che $\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 \underset{\text{Hip. induttiva}}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$= (n+1)\left[\frac{n(2n+1)+6(n+1)}{6}\right] =$$

$$= (n+1)\,\frac{2n^2+7n+6}{6}$$

$2n^2+7n+6=0$

$n_{1,2} = \frac{-7\pm\sqrt{1}}{4} \begin{cases} -2 \\ -\frac{3}{2} \end{cases}$

$$= (n+1)\,\frac{2(n+2)\left(n+\frac{3}{2}\right)}{6} =$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \sum_{k=0}^{n+1} k^2 \checkmark$$

Esercizio Calcolare $f(n) = \sum_{k=0}^{n} k^2$

dim

$$(k+1)^3 - k^3 = \cancel{k^3} + 3k^2 + 3k + 1 - \cancel{k^3} = 3k^2+3k+1$$

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2+3k+1 \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\boxed{(0+1)^3} - 0^3 = 3\cdot 0^2 + 3\cdot 0 + 1$$

$$\boxed{(1+1)^3} - \boxed{1^3} = 3\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + 1$$

$$\boxed{(2+1)^3} - \boxed{2^3} = 3\cdot 2^2 + 3\cdot 2 + 1$$

$$- - - -$$

$$\boxed{((n-1)+1)^3} - (n-1)^3 = 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1$$

$$(n+1)^3 - \boxed{((n-1)+1)^3} = 3\cdot n^2 + 3\cdot n + 1$$

Sommo le n uguaglianze

$$(n+1)^3 - 0^3 = 3\cdot\sum_{k=0}^{n} k^2 + 3\sum_{k=0}^{n} k + (n+1)$$

$$(n+1)^3 = 3 \cdot \boxed{\sum_{k=0}^{n} k^2} + 3\,\frac{n(n+1)}{2} + n+1$$

$$\left[(n+1)^3 - \frac{3}{2}n(n+1) - n - 1\right] \cdot \frac{1}{3} = \sum_{k=0}^{n} k^2$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{1}{6}\left[2(n^3+3n^2+3n+1) - 3n^2 - 3n - 2n - 2\right]$$

$$6n - 5n$$

$$= \frac{1}{6}\left[2n^3+3n^2+n\right] = \frac{n}{6}\left[2n^3+3n^2+n\right]$$

$$= \frac{n}{6}\left[2(n+1)\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\right] = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$