

Correzione dello scritto del 4 febbraio 2014

Analisi Matematica 1

Soluzione della prima parte

(1) Se $z \in \mathbb{C}$ è una qualunque soluzione dell'equazione $z^2 + 2z + (1-i) = 0$ allora

(A) $\Im z < 0$.

(B) $\Re z + \Im z = \sqrt{2} - 1$.

(C) $\Re z - \Im z = -1$.

(D) $\Re z > 0$.

$$z_{1,2} = -1 + \sqrt{1-1+i} = -1 + \sqrt{i} = -1 + \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$$

ovvero $z_1 = \left(-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + i \frac{\sqrt{2}}{2}$ $z_2 = -\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - i \frac{\sqrt{2}}{2}$

La soluzione è (C) infatti

$$\Re z_1 - \Im z_1 = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -1$$

$$\Re z_2 - \Im z_2 = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = -1$$

(2) Dato il parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, la serie $\sum_n n^\alpha [\log(n+1) - \log n]$

(A) diverge negativamente per almeno un valore di $\alpha \in \mathbb{R}$.

(B) converge se e solo se $\alpha < -1$.

(C) converge per ogni $\alpha < 0$.

(D) converge per qualche $\alpha > 0$.

Il Termine generale della serie è $Q_n = n^\alpha \log \frac{n+1}{n}$

$$= n^\alpha \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Quando $n \rightarrow +\infty$ si ha $\frac{1}{n} \rightarrow 0^+$ per cui $\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$
e dunque

$$Q_n \sim n^\alpha \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^{1-\alpha}} \text{ per } n \rightarrow +\infty. \text{ Per il Teorema}$$

del confronto asintotico $\sum_n n^\alpha$ converge se
 $\sum_n \frac{1}{n^{1-\alpha}}$ converge se $1-\alpha > 1$ se $\alpha < 0$
e quindi la risposta corretta è (C)

(3) Quale dei seguenti integrali vale $+\infty$?

(A) $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x^2} dx$.

(B) $\int_0^{\pi^2} \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$.

(C) $\int_0^{\sqrt{\pi}} \frac{\sin x^2}{x} dx$.

(D) $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx$.

Bisogna esaminare le funzioni integrande per $x \rightarrow 0$

$$\frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1, \quad \frac{\sin x^2}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0, \quad \frac{\sin x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1 \text{ mentre}$$

sen $\frac{x}{x^2} = \frac{x+o(x)}{x^2} \sim \frac{1}{x}$ per $x \rightarrow 0^+$, dunque

$\int_0^1 \frac{\text{sen } x}{x^2} dx$ si comporta come $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ che diverge a $+\infty$

Ne segue che la risposta corretta è la (A)

(4) I valori di $a, b \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione $f(x) = \begin{cases} 5 \sin(\pi x) - 3|x| + 2x & \text{se } |x| < 1 \\ ax + bx^2 & \text{se } |x| \geq 1 \end{cases}$ risulta continua su $\mathbb{R}$ sono

(A) $b = 0$, a qualsiasi.

(B) $b = -3$, $a = 2$.

(C) $b = 0$, $a = -1$.

(D) $a = 1/2$, b qualsiasi.

La funzione è continua in $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$: dobbiamo

vedere che succede quando $x = \pm 1$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= -a + b = -3 - 2 = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= -3 + 2 = a + b = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} b - a = -5 \\ b + a = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -3 \\ a = 2 \end{cases}$$

La risposta corretta è perciò la (B)

(5) La successione $\frac{\frac{4}{n^3} \cos n! - \frac{2}{n} \sin \frac{5}{n}}{\sqrt{2n^6 + 3n} - \sqrt{2n^6 - n}}$ tende a

(A) $-5\sqrt{2}$.

(B) $-\infty$.

(C) $-6/5$.

(D) 0 .

Quando $n \rightarrow +\infty$ la successione a_n si comporta come segue (ricorda che $\cos n! \in [-1, 1] \forall n \in \mathbb{N}$)

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\sqrt{2n^6 + 3n} + \sqrt{2n^6 - n}}{2n^6 + 3n - 2n^6 + n} \cdot \frac{\frac{4}{n^3} \cos(n!) - \frac{2}{n} \left(\frac{5}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{1} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{n^3}{n} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{3}{2n^5}} + \sqrt{1 - \frac{1}{2n^5}} \right) \cdot \left(-\frac{10}{n^2} \right) \cdot \left(1 + o(1) \right) \\ &= -\frac{5}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \left(2 + o(1) \right) \cdot \left(1 + o(1) \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -5\sqrt{2} \end{aligned}$$

La risposta corretta è la (A)

(6) La retta tangente al grafico di $f(x) = x^{-x}$ nel punto di ascissa $x_0 = e$ ha equazione

(A) $y = e^{-e} - 2(x - e)e^{-e}$.

(B) $y = e^{-e} - xe^{-e}$.

(C) $y = -e^{-e}(x - e) + e^{-e}$.

(D) $y = e^{-e} - 2xe^{-e}$.

$$f(x) = e^{-x \log x} \quad f'(x) = e^{-x \log x} \cdot (-1 \cdot \log x - x \cdot \frac{1}{x}) =$$

$$= x^{-x} (-\log x - 1)$$

$$f(e) = e^{-e} \quad f'(e) = -2e^{-e} \quad \text{e quindi la retta } T_e \text{ \u00e8}$$

dato da

$$y = f(e) + f'(e)(x - e) =$$

$$= e^{-e} - 2(x - e)e^{-e}$$

ovvero la risposta corretta \u00e8 la (A)

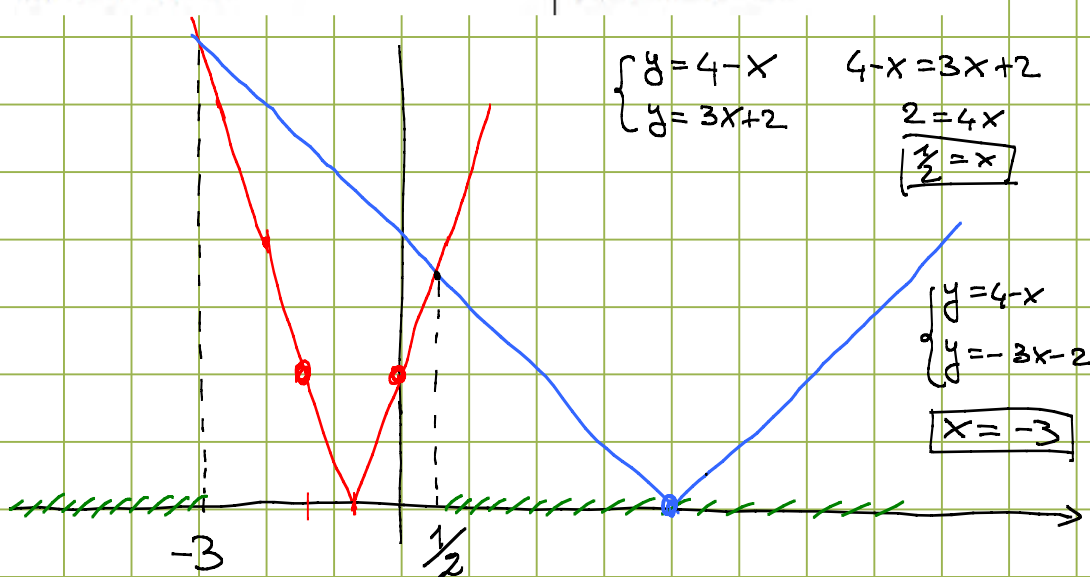
(7) Sia S l'insieme delle soluzioni della disequazione $|2 + 3x| > |4 - x|$. Allora

(A) S \u00e8 limitato.

(B) $[-6, -4] \not\subseteq S$.

(C) $[1, 3] \subseteq S$.

(D) $[-3, -1] \subseteq S$.



dunque la disequazione \u00e8 soddisfatta $\forall x \in]-3, \frac{1}{2}[$, e la risposta corretta \u00e8 la (C)

Soluzione della seconda parte

1) Determinate le soluzioni $(z, \bar{z})$, con $z \in \mathbb{C}$, del sistema

$$\begin{cases} (z + \bar{z})(z - \bar{z}) = 4i \\ |z|^2 = 5 - 3(\Im z)^2 \end{cases}$$

$$z = a + ib \quad \begin{cases} (2a) \cdot (2ib) = 4i \\ a^2 + b^2 = 5 - 3b^2 \end{cases} \quad \begin{cases} a \cdot b = 1 \\ a^2 + 4b^2 = 5 \end{cases}$$

$$a \text{ e } b \text{ non } \neq 0 \quad \begin{cases} a = \frac{1}{b} \\ 1 + 4b^4 - 5b^2 = 0 \end{cases}$$

$$b_{1,2}^2 = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{8} = \frac{1}{4} \quad \begin{matrix} b_1 = 1 & b_2 = -1 \\ b_3 = \frac{1}{2} & b_4 = -\frac{1}{2} \end{matrix}$$

da segue che le soluzioni sono

$$z_1 = 1 + i \quad z_2 = -1 - i \quad z_3 = 2 + \frac{i}{2} \quad z_4 = -2 - \frac{i}{2}$$

2) Sia $f(x) = \sin x - e^{-x} + (\cos x)e^{-2x-x^2-\frac{1}{6}x^4}$.

a) Calcolate il polinomio di Taylor di ordine 4 di f , centrato in $x_0 = 0$.

b) (SOLO ANALISI 1) Calcolate al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - \alpha x^3}{x^4}.$$

$$\begin{aligned} e^{-2x-x^2-\frac{1}{6}x^4} &= 1 + \left(-2x - x^2 - \frac{x^4}{6}\right) + \frac{1}{2} \left(2x + x^2 + \frac{x^4}{6}\right)^2 - \frac{1}{6} \left(2x + x^2 + \frac{x^4}{6}\right)^3 \\ &\quad + \frac{1}{24} \left(2x + x^2 + \frac{x^4}{6}\right)^4 + o(x^4) \quad -\frac{1}{6} + \frac{3}{6} - \frac{6}{6} + \frac{4}{6} \\ &= 1 - 2x + x^2(-1+2) + x^3\left(2 - \frac{4}{3}\right) + x^4\left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{2} - 2 + \frac{2}{3}\right) + o(x^4) \\ &= 1 - 2x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 - x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

$$f(x) = \left(x - \frac{x^3}{6}\right) - \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right) + \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) \left(1 - 2x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 - x^4\right) + o(x^4)$$

$$f(x) = \cancel{1} + \cancel{2x} - \cancel{\frac{x^2}{2}} - \frac{x^4}{24} + \cancel{1} - \cancel{2x} + \cancel{x^2} + \frac{2}{3}x^3 - x^4 - \cancel{\frac{x^2}{2}} + x^3 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$$= \frac{5}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^4 + o(x^4) \quad x \rightarrow 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - \alpha x^3}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{5}{3} - \alpha\right)x^3 - \frac{3}{2}x^4 + o(x^4)}{x^4} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < \frac{5}{3} \\ -\frac{3}{2} & \text{se } \alpha = \frac{5}{3} \\ -\infty & \text{se } \alpha > \frac{5}{3} \end{cases}$$

3) Considerate la funzione $f(x) = 2\log(x^2 + 2x + 2) - x^2 - 2x$.

- Trovatene i limiti agli estremi del dominio e gli intervalli di monotonia. Disegnate poi un grafico di f .
- Trovate al variare di $k \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.
- (SOLO ANALISI 1) Trovate la primitiva della funzione $f(x)$ che si annulla nel punto $x_0 = -1$.

$$\text{Dom}(f) = \{x: x^2 + 2x + 2 > 0\} = \mathbb{R} \quad \text{infatti } x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-2} \notin \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{2}{x^2} \log(x^2 + 2x + 2) - 1 - \frac{2}{x} \right) = -\infty$$

Essendo la funzione continua su $\mathbb{R}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f = \lim_{x \rightarrow +\infty} f = -\infty$, allora per il Corollario del Teorema di Weierstrass esiste un punto

$$x_H \in \mathbb{R} \text{ tale che } f(x_H) = \max f(\mathbb{R})$$

$$f(x) = 2\log(x^2 + 2x + 2) - x^2 - 2x \Rightarrow f'(x) = \frac{2(2x+2)}{x^2 + 2x + 2} - 2x - 2$$

$$f'(x) = \frac{2(2x+2)}{x^2 + 2x + 2} (2 - x^2 - 2x - 2) = 0 \quad \text{se } f'(x) = \frac{-2(x+1) \cdot x \cdot (x-2)}{x^2 + 2x + 2} = 0$$

$$f'(x) = 0 \quad \text{se } x_1 = -2 \quad x_2 = -1 \quad x_3 = 0$$

$$f' \begin{cases} > 0 & \text{se } x < -2 \\ < 0 & \text{se } -2 < x < -1 \\ > 0 & \text{se } -1 < x < 0 \\ < 0 & \text{se } 0 < x \end{cases}$$

$$x = -2 \text{ punto di max relativo} \quad f(-2) = 2\log 2 - \cancel{4} + \cancel{4}$$

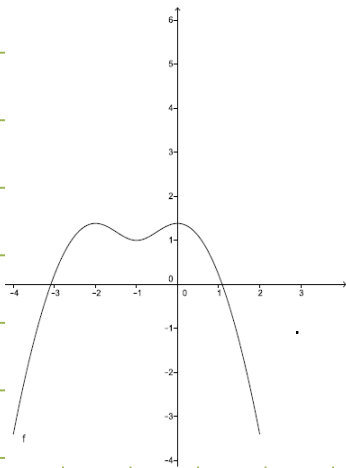
$$x = -1 \text{ punto di min relativo} \quad f(-1) = 2\log 3 + 1$$

$$x = 0 \text{ punto di max relativo} \quad f(0) = 2\log 2$$

Per il corollario del Teorema di Weierstrass,

$$f(-2) = 2\log 2 = \max f(\mathbb{R}) = f(0)$$

Un grafico è il seguente



$$\int \log(x^2+2x+2) dx = x \log(x^2+2x+2) - \int \frac{x(2x+2)}{x^2+2x+2} dx$$

$$= x \log(x^2+2x+2) - \int \frac{2x^2+2x+2x+2}{x^2+2x+2} dx$$

$$= x \log(x^2+2x+2) - 2x + \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2} dx + 2 \int \frac{1}{x^2+2x+2} dx$$

$$= x \log(x^2+2x+2) - 2x + \log(x^2+2x+2) + 2 \int \frac{dx}{(x+1)^2+1}$$

$$= \log(x^2+2x+2)(x+1) - 2x + 2 \arctan(x+1) + c \quad c \in \mathbb{R}$$

ne segue che

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= 2(x+1) \log(x^2+2x+2) + 4 \arctan(x+1) - 4x - \frac{x^3}{3} - x^2 + c \\ &= F(x) + c \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$F(-1) = 2(-1+1) \log(1-2+2) + 4 \arctan(1+1) + 4 + \frac{1}{3} - 1$$

$$= \frac{10}{3}$$

e dunque la primitiva ^{GCM} cercata, che si annulla in $x_0 = -1$, sarà data da

$$\begin{aligned} G(x) = F(x) - F(-1) &= 2(x+1) \log(x^2+2x+2) + 4 \arctan(x+1) \\ &\quad - 4x - \frac{x^3}{3} - x^2 + \frac{10}{3} \end{aligned}$$

4) Sia $a_n = \int_n^{n+1} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$.

a) Calcolate $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

b) Calcolate la somma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

c) Determinate per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^\alpha$.

$$Q_m = \left[\frac{1}{2} \arctan^2 x \right]_n^{m+1} = \frac{1}{2} \left[\arctan^2(m+1) - \arctan^2(m) \right]$$

$$\Rightarrow \lim_{m \rightarrow +\infty} Q_m = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \arctan^2(m+1) - \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \arctan^2 m = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{8} = 0$$

Per provare la b) si può procedere in due modi (che non poi lo stesso procedimento)

$$\begin{aligned} 1) \sum_{k=0}^m a_k &= \frac{1}{2} (Q_0 + Q_1 + \dots + Q_m) = \frac{1}{2} (\arctan^2 1 - \arctan^2 0) + (\arctan^2 2 - \arctan^2 1) + \dots + \\ &\quad + (\arctan^2(m+1) - \arctan^2 m) \\ &= \arctan^2(m+1) - \arctan^2(0) \end{aligned}$$

che dunque

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^m a_k = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \arctan^2(m+1) = \frac{\pi^2}{8}$$

$$2) \text{ posto } f(t) = \frac{\arctan(t)}{1+t^2} \text{ si ha } a_k = \int_k^{k+1} f(t) dt \text{ e quindi}$$

$$\sum_{k=0}^m a_k = \int_0^1 f(t) dt + \int_1^2 f(t) dt + \int_2^3 f(t) dt + \dots + \int_m^{m+1} f(t) dt = \int_0^{m+1} f(t) dt$$

$$\begin{aligned} \text{da cui si ottiene } \sum_{k=0}^{\infty} a_k &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^{m+1} f(t) dt = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} \arctan^2 x \right]_0^{m+1} = \\ &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \arctan^2(m+1) = \frac{\pi^2}{8} \end{aligned}$$

Per provare la c) si può osservare che

$$Q_m = \frac{1}{2} \left[\arctan^2(m+1) - \arctan^2(m) \right] = \frac{1}{2} (\arctan(m+1) + \arctan(m)) \cdot (\arctan(m+1) - \arctan(m))$$

$$\text{ma per } \operatorname{Tg}(a-b) = \frac{\sin a \cos b - \cos a \sin b}{\cos a \cos b + \sin a \sin b} = \frac{\operatorname{Tg} a - \operatorname{Tg} b}{1 + \operatorname{Tg} a \operatorname{Tg} b}$$

$$\text{da cui segue } a-b = \arctan \left(\frac{\operatorname{Tg} a - \operatorname{Tg} b}{1 + \operatorname{Tg} a \operatorname{Tg} b} \right)$$

Ponendo $a = \arctan(m+1)$, $b = \arctan m$ si ottiene

$$\arctan(m+1) - \arctan(m) = \arctan\left(\frac{m+1-m}{1+(m+1)\cdot m}\right)$$

$$= \arctan\left(\frac{1}{m^2+m+1}\right) = \arctan\left(\frac{1}{m^2} + \frac{m+1}{m^2(m^2+m+1)}\right) = \frac{1}{m^2} + o\left(\frac{1}{m^2}\right)$$

Ne segue che $e_m = \frac{1}{2} [\arctan(m+1) + \arctan(m)] \cdot \left(\frac{1}{m^2} + o\left(\frac{1}{m^2}\right)\right)$

da cui si ottiene $Q_m \sim \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{m^2}$ per $m \rightarrow +\infty$

Dunque $\sum_m Q_m^\alpha$ converge se $\sum_m \left(\frac{\pi}{2m^2}\right)^\alpha$

se $2\alpha > 1$ se $\alpha > \frac{1}{2}$

Per provare la c) si può osservare anche che

Si ha che $\arctan x = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x}$ per $x > 0$ da cui segue

$$\begin{cases} \arctan^2 m = \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{m}\right)^2 \\ \arctan^2(m+1) = \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{m+1}\right)^2 \end{cases} \text{ ne segue che}$$

$$Q_m = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{4} - \pi \arctan \frac{1}{m+1} + \arctan^2 \frac{1}{m+1} - \frac{\pi^2}{4} + \pi \arctan \frac{1}{m} - \arctan^2 \frac{1}{m} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\pi \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \right) + o\left(\frac{1}{m^2}\right) - \frac{1}{m^2} + \frac{1}{(m+1)^2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\pi \frac{1}{m(m+1)} + o\left(\frac{1}{m^2}\right) \right) \text{ infatti } \frac{1}{m^2} - \frac{1}{(m+1)^2} = \frac{m+1}{m^2(m+1)^2} = o\left(\frac{1}{m^2}\right)$$

da cui segue $Q_m \sim \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{m^2}$ per $m \rightarrow +\infty$

e quindi $\sum_m Q_m^\alpha$ converge se $\sum_m \frac{\pi^\alpha}{2^\alpha m^{2\alpha}}$ converge

se $2\alpha > 1$ se $\alpha > \frac{1}{2}$