

Lezione 8

LIMITI E CONTINUITA'

1) Determinare frontiera, interno, chiusura, insieme dei punti di accumulazione, insieme dei punti isolati dei seguenti insiemi:

a) $A =]0,5[$; b) $B = \mathbb{Q} \cap [0,1[$; c) $C = \left\{3, \frac{1}{2}, 3 - \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 3 - \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 3 - \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, 3 - \frac{1}{n}, \dots\right\}$

2) Determinare i punti di accumulazione dei seguenti insiemi numerici:

a) $A = \left\{\frac{9n^2 - 1}{4n^2} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\right\}$; b) $B = \left\{\frac{7}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$; c) $C = \{-4\} \cup [2,5)$

3) Verificare, usando la definizione, l'esattezza dei seguenti limiti: a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty$;

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x-1} = -\infty$; c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x} = 1$; d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 9x + 10}{x-2} = 1$

4) Stabilire se esiste il seguente limite: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{e^x - 1}{x^2 - 5x + 6}$

5) Determinare il valore del parametro $a \in \mathbb{R}$ per il quale esiste $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$, dove $f(x) = \begin{cases} e^{-x-2} & x \leq -2 \\ \sqrt{x+a} & x > -2 \end{cases}$

6) Dimostrare che i polinomi sono funzioni continue.

7) Studiare la continuità della funzione $f(x) = 1/x$ in un punto $x_0 > 0$.

8) Studiare la continuità delle seguenti funzioni:

a) $f(x) = \frac{2x-3}{|x|+2}$; b) $f(x) = \begin{cases} 2\sin x & x < 0 \\ \log(x^2 + e), & x \geq 0 \end{cases}$; c) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2-x} & , x < 1 \\ 2 & , x = 1 \\ \frac{1}{x} & , x > 1 \end{cases}$

9) Determinare il valore dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ per i quali le seguenti funzioni risultano continue $\forall x \in \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \begin{cases} \arctg \frac{1}{x} & x \in]0,1[\\ ax + b & x \notin]0,1[\end{cases}$; b) $f(x) = \begin{cases} a \log(1+x) & x \in [0, e-1] \\ x^2 + b & x \notin [0, e-1] \end{cases}$

10) Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

a) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $f(-1) > 0$, $f(1) < 0$, allora $f(x)$ si annulla almeno due volte.

b) la funzione $f(x) = \frac{3x}{e^x + 2}$ non ha massimo perché il suo dominio non è un intervallo limitato e chiuso.

c) la funzione $f(x) = (x-2)^3 - 3x - 4$ assume in qualche punto dell'intervallo $[1, 3]$ il valore -10 .

d) se la funzione $f(x)$, definita sull'intervallo $[a, b]$, assume valori dello stesso segno negli estremi dell'intervallo, allora non esiste $x \in]a, b[$ in cui $f(x)$ si annulla.

RISULTATI:

1) $\mathcal{F}(A) = \{0,5\}$, $\overset{\circ}{A} =]0,5[$, $\overline{A} = [0,5]$, $D(A) = [0,5]$, $I(A) = \Phi$; $\mathcal{F}(B) = \mathbb{Q} \cap [0,1]$, $\overset{\circ}{B} = \Phi$, $\overline{B} = \mathbb{Q} \cap [0,1]$, $D(B)$

$= \Phi$, $I(B) = B$; $\mathcal{F}(C) = C \cup \{0\}$, $\overset{\circ}{C} = \Phi$, $\overline{C} = C \cup \{0\}$, $D(C) = \{0,3\}$, $I(C) = C \setminus \{3\}$; 2) a) $9/4$; b) $7/2$; c) ogni

$x \in [2,5]$; 5) $a = 3$; 8) a) continua $\forall x \in \mathfrak{R}$; b) continua $\forall x \in \mathfrak{R} \setminus \{0\}$; c) continua $\forall x \in \mathfrak{R} \setminus \{1\}$; 9) a) $a = -\pi/4$, $b = \pi/2$; b) $a = (e - 1)^2$, $b = 0$; 10) a) vera; b) falsa; c) vera, d) falsa.