Lezioni 6 - 7

NUMERI COMPLESSI:

1) Calcolare il valore di

a) $w = \dfrac{z^2 - \bar{z}^2}{(z+1)(\bar{z}-1)+1}$ quando z = 1 + i ; b) $w = \dfrac{\overline{(iz)} + |z|}{z+i}$ quando z = 3 – 4i ;

c) $w = \dfrac{\bar{z} \cdot z^2 - iz}{2z-3-i}$ quando z = 1 + 2i ; d) $w = \dfrac{\bar{z}^2 \cdot z - (\overline{iz})^2}{z^2+2}$ quando z = 1 – i

2) Dati i numeri v = β + 2i e w = 2 + i, determinare β in modo che risulti $\operatorname{Re}\dfrac{v}{w} = \operatorname{Im}\dfrac{v}{w}$.

3) Calcolare le seguenti potenze: a) $\left(\sqrt{3}-i\right)^8$; b) $\left(1-i\sqrt{3}\right)^8$; c) $w^6 = \left(\cos\dfrac{\pi}{3} - i sen\dfrac{\pi}{6}\right)^6$

4) Calcolare e rappresentare graficamente nel piano di Gauss le radici n-esime (nei casi n = 3 e n = 4) di: a) w = 1; b) w = i ; c) $-1-i\sqrt{3}$

5) Determinare le soluzioni in C delle seguenti equazioni:

a) $z^2 - 2iz - 5 = 0$; b) $z + \bar{z} - \dfrac{1}{\bar{z}} = 0$; c) $z^2 + |z| \cdot i + \sqrt{2} = 0$; d) $2z^2 - 4iz - (3 + i\sqrt{3}) = 0$

e) $z^6 = 8z^3$; f) $z^2 \cdot \bar{z}^2 + 2\bar{z}^2 + iz^2 + 2i = 0$; g) $(2+2i)z^4 - i\sqrt{2}z = 0$; h) $z^6 + 4z^3 + 8 = 0$

6) Determinare le soluzioni in C dei seguenti sistemi di equazioni:

a) $\begin{cases} z \cdot \overline{w} = i \\ |z|^2 \cdot w + z = 1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} \left|\dfrac{w}{2}\right| = |z| = \sqrt{2} \\ 2z + w = 4 \end{cases}$; c) $\begin{cases} |z - (1+3i)| = 2 \\ i \cdot (z + \bar{z}) = z - \bar{z} \end{cases}$; d) $\begin{cases} z + \bar{z} = -\dfrac{8}{5}|z| \\ \operatorname{Im} z = 2 + \operatorname{Re} z \end{cases}$

e) $\begin{cases} z^2 = -|w|^4 \\ w^2 - (2i+1)w = \dfrac{z+\bar{z}}{3} + 1 - i \end{cases}$; f) $\begin{cases} z^2 + w = 1 \\ 2\overline{w} + iz = 2 \end{cases}$; g) $\begin{cases} z \cdot (1 + |w|) = -2i \\ w \cdot \bar{z} + (2 - iz) \cdot |w| = |z| \cdot w \end{cases}$

RISULTATI: 1a) -1 + i ; 1b) 2 + i ; 1c) 2 – 3i , 1d) -1/2 + 3/2 i ; 2) β=2/3 ; 3a) $2^7\left(-1+i\sqrt{3}\right)$; 3b) $-2^7\left(1+i\sqrt{3}\right)$; 3c) $\dfrac{i}{8}$; 4a) con n = 3: $z_0 = 1$, $z_{1,2} = -\dfrac{1}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, con n = 4: $z_0 = 1$, $z_1 = i$, $z_2 = -1$, $z_3 = -i$; 4b) con n = 3: $z_{0,1} = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}$, $z_2 = -i$, con n = 4 : $z_{0,1,2,3} = \cos\left(\dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2}\right) + i sen\left(\dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2}\right), k = 0,1,2,3$; 4c) …;

5a) $z_1 = 2 + i$, $z_2 = -2 + i$; 5b) $z_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $z_2 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; 5c) $z_{1,2} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{5}{8}\pi + k\pi\right) + i sen\left(\dfrac{5}{8}\pi + k\pi\right)\right), k = 0,1$;

5d) $z_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i$, $z_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$; 5e) $z_{1,2,3} = 0$, $z_4 = 2$, $z_{5,6} = -1 \pm i\sqrt{3}$; 5f) $z_{1,2} = \pm i\sqrt{2}$, $z_{3,4} = \pm\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

5g) $z_1 = 0$, $z_{2,3,4} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)+isen\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)\right), k = 0,1,2$; 5h) $|z|=\sqrt{2}$, $\alpha_1 = \pi/4$, $\alpha_2 = 5\pi/12$, $\alpha_3=11\pi/12$, $\alpha_4=13\pi/12$, $\alpha_5=19\pi/12$, $\alpha_6=7\pi/4$; 6a) $z = 1/2 + 1/2i$, $w = 1 - i$; 6b) $z_1= 1 + i$ e $w_1 = 2 - 2i$, $z_2 = 1 - i$ e $w_2 = 2 + 2i$; 6c) $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 3 + 3i$; 6d) $z_1 = - 8 - 6i$, $z_2 = - 8/7 + 6/7\, i$; 6e) $w_1 = i$ e $z_1 = \pm i$, $w_2 = 1 + i$ e $z_2 =\pm 2i$;

6f) $w_1 = 5/4$ e $z_1 = 1/2\ i$, $w_2 = 1$ e $z_2 = 0$, $w_3 = \frac{7}{8}+\frac{\sqrt{3}}{8}i$ e $z_3 = \frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}i$, $w_4 =\frac{7}{8}-\frac{\sqrt{3}}{8}i$ e $z_4 = -\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}i$;

6g) $z = -2i$ e $w = 0$, $z = \frac{-2i}{1+\sqrt{2}}$ e $w = 1 + i$.