Lezione 3

NUMERI NATURALI E PRINCIPIO DI INDUZIONE:

1) Provare che

$$\bullet 1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + n \times (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$\bullet 1 \times 2^0 + 2 \times 2 + 3 \times 2^2 + \dots + n \times 2^{n-1} = (n-1) \times 2^n + 1$$

2) Dimostrare per induzione la disuguaglianza di Bernouilli $(1+a)^n \geq 1+na$, $\forall a \geq -1$

3) Provare per induzione che. a) $\forall n$, $3^n \geq \frac{n}{2} \cdot 2^n$; b) $\forall n \geq 2$, $3^n + 4^n \leq 5^n$;

c) $\forall n \geq 6$, $n^n > 2^n \cdot n!$; d) $\forall n \geq 1$, $\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$; e) $\forall n \geq 1$ $n! \geq 2^{n-1}$;

f) $\forall n$, $3^{2n} - 2^n$ è multiplo di 7 ; g) $\forall n \geq 5$, $2^n > n^2$.

4) Provare che $\sum_{k=0}^n q^k = \begin{cases} n+1, & q=1 \\ \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, & q \neq 1 \end{cases}$, $\forall n \geq 0$

5) Provare che $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ $\forall n \geq 1$

6) Siano date le seguenti uguaglianze:

a) $1 + 1/2 = 2 - 1/2$, $1 + 1/2 + 1/4 = 2 - 1/4$, $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 = 2 - 1/8$, etc.

b) $1 - 1/2 = 1/2$, $(1 - 1/2)(1 - 1/3) = 1/3$, $(1 - 1/2)(1 - 1/3)(1 - 1/4) = 1/4$, etc.....

Trovare e dimostrare per induzione la legge generale che queste uguaglianze suggeriscono.