

Lezione 21

FUNZIONE INTEGRALE E INTEGRALI DEFINITI

1) Calcolare, se esistono, i seguenti integrali definiti:

a) $\int_{-1}^1 \frac{x^{\frac{2}{3}}}{1+x^{\frac{4}{3}}} dx$; b) $\int_1^e \frac{\log x}{\sqrt{x}} dx$; c) $\int_0^1 \frac{2+(x+1)\sqrt{x}}{2+x} dx$; d) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{1+4\sin^2 x} dx$;

2) L'integrale $\int_{e^{-1/e}}^{e^e} \frac{(\log \log x)^3}{x \log x} dx$ (A) vale 1/4 ; (B) vale 0 ; (C) vale 1/2 ; (D) vale (e - 1/e) .

3) L'integrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin x dx$ vale : (A) $\frac{\pi}{2} - 1$; (B) -1 ; (C) 0 ; (D) 1

4) L'integrale $\int_1^e \frac{\arctg(\log x)}{x} dx$ vale : (A) $\frac{\pi}{4} - \log \sqrt{2}$; (B) $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{e}$; (C) 2π ; (D) $\frac{\arctg 1}{e}$.

5) Calcolare $\int_{-1}^1 |e^{-x} - 2| dx$.

6) Dato $\lambda > 0$, studiare brevemente la funzione $f_\lambda(x) = \lambda x + 1/x$, per $x > 0$.

Detto x_λ il punto di minimo di f_λ su \mathbb{R}^+ , calcolare $\int_{1/2x_\lambda}^{2x_\lambda} f_\lambda(t) dt$.

7) Data la funzione $f(x) = x^2 - 4|x| + 3$, studiarla e tracciarne il grafico.

Il grafico di $f(x)$ e l'asse delle ascisse dividono il piano in varie parti, alcune delle quali di area finita; determinare l'area complessiva di queste ultime.

8) Calcolare $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, dove $f(t) = -\frac{\sin 2t}{1 + \sin^2 t}$.

9) Calcolare la derivata prima delle seguenti funzioni:

a) $F(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} \sqrt{1-t^2} dt$; b) $F(x) = \int_{2x}^{x^2} \frac{e^t}{t} dt$; c) $F(x) = \int_x^{x^2} \sqrt{te^t} dt$

10) Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $F(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} e^t dt$ nel suo punto di ascissa 0.

11) Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $F(x) = \int_{2x}^{x^2} \frac{\sin t}{t} dt$ nel suo punto di ascissa 2.

12) Discutere continuità e derivabilità della funzione $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, dove $F(x) : [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ e

$$f(t) = \begin{cases} -1, & -1 \leq t < 0 \\ -2t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 2t - 4, & 1 < t \leq 2 \\ 1, & 2 < t < 3 \\ 1/2, & t = 3 \end{cases}$$

13) Data la funzione $F(x) = \int_1^x e^{t^2} \cdot (\text{sent} + 3) dt$, stabilire se è invertibile e, in caso affermativo, calcolare $(F^{-1})'(0)$.

14) Dopo aver verificato che la funzione $F(x) = \left(\int_1^x e^{2t-t^2} dt - 1 \right)$ è invertibile, detta $G(x)$ la sua inversa, scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $G(x)$ nel suo punto di ascissa -1 .

15) Determinare il minimo valore assunto dalla funzione $f(x) = \int_0^x (t^3 - 2t) \cdot e^{-t} dt$.

16) Determinare il numero delle soluzioni dell'equazione $2x - \frac{1}{2} \int_0^x e^{-t^2} dt = 1$.

17) Il limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\int_0^x e^{-2t^2} dt \right) - x}{x^3}$ vale: (A) $1/6$; (B) $-2/5$; (C) $-2/3$; (D) $-\infty$.

18) Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\log x} \left(x - \int_1^x \frac{1}{e^t} dt \right)$; b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \int_x^{2x} \frac{\text{sent}}{t} dt$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x \frac{5 + 2t - \text{sent}}{1 + 3t^2} dt}{\log(3 + 2x)}$

19) Date le funzioni a) $F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$ e b) $\int_2^{x^2+1} \text{sen}(t^2) dt$ scrivere per ciascuna di esse il polinomio di Taylor (di grado 3 per (a) e di grado 2 per (b)) centrato in $x_0 = 1$ e disegnare un grafico qualitativo di F nell'intorno di $x_0 = 1$.

20) Data la funzione $F(x) = \int_x^{x+1} \frac{1}{t^2 + t + 1} dt$, $\forall x \in \mathbb{R}$

a) disegnare un grafico approssimativo di F

b) determinare al variare di $k \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazione $F(x) = k$.

RISULTATI

1) a) $6 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{8} \log \frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{8} \pi \right)$; b) $4 - 2\sqrt{e}$; c) $-\frac{4}{3} + \log \frac{9}{2} + 2\sqrt{2} \arctan \frac{\sqrt{2}}{2}$; d) $\frac{\pi}{8}$;

2) (B); 3) (D); 4) (A); 5) $-4 + 4\log 2 + e + 1/e$; 6) $15/8 + \log 4$; 7) $16/3$;

8) $F(x) = -\log(1 + \text{sen}^2 x)$; 9) a) $|\text{sen} x| \cdot \text{sen} x - |\cos x| \cdot \cos x$; b) $\frac{1}{x} (2e^{x^2} - e^{2x})$; c) $2x|x| \sqrt{e^{x^2} - \sqrt{x}e^x}$;

10) $y = -x + e - 1$; 11) $y = (\text{sen} 4)/2 \cdot (x - 2)$; 12) $F(x)$ continua in $[-1, 3]$, non derivabile in $x = 0$ e in $x = 2$;

13) $\frac{1}{e(\text{sen} 1 + 3)}$; 14) $y = \frac{1}{e}(x + 1) + 1$; 15) $4 - e^{\sqrt{2}}(10 - 6\sqrt{2})$; 16) una soluzione $\in]0, 1[$; 17) (C); 18) a) -1 ;

b) 1 ; c) $2/3$; 19) a) $P_3(x) = e(x - 1) + e/6(x - 1)^3$; b) $P_2(x) = (2\text{sen} 4)(x - 1) + 1/2(2\text{sen} 4 + 16\cos 4)(x - 1)^2$; 20) due sol. se $0 < k < \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$, una sol. se $k = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$, zero sol. altrove.