

Lezione 19

CONVESSITA'

- 1) Data una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convessa e derivabile, e tale che $f(0) = 0$, dimostrare che si ha $f(x) \leq x \cdot f'(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
- 2) Data la funzione $f(x) = x^2$, verificare che il grafico della curva sta sopra la retta tangente nel punto del grafico di coordinate $(1, f(1))$. Dimostrare che questo accade per ogni punto del grafico di coordinate $(x_0, f(x_0))$.
- 3) Dimostrare che, se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione convessa, derivabile, con $f(0) = 0$ e $f'(0) = 1$, si ha $f(x) \geq x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
- 4) Scrivere una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che: f è strettamente crescente $\forall x \in \mathbb{R}$, f è strettamente concava su $]-\infty, 1[$, f è strettamente convessa su $]1, +\infty[$, $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$.

REGOLA DI DE L'HOSPITAL

Calcolare i seguenti limiti:

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(e^x + x)}{\sin x}$; 2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg(x^2) \right) \cdot x^3$; 3) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(\cot g(x))}{\log(2x^3)}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tg(2x) \cdot \log(\sin(2x))$; 5) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin(2x))^{\tg(2x)}$; 6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \cdot e^{-x} + x}{x + \sin(x) \cos(x)}$.

POLINOMI DI TAYLOR

- 1) Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine 5 centrato in $x_0 = 0$ per $f(x) = \tg x$.
- 2) Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine 3 centrato in $x_0 = 1$ per $f(x) = e^x$
- 3) Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine 4 centrato in $x_0 = \pi/4$ per $f(x) = \sin x$
- 4) Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine n centrato in $x_0 = 2$ per $f(x) = 1 + 2x - x^4/3 + x^5$
- 5) Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine 4 centrato in $x_0 = 0$ per $f(x) = e^x - e^{\sin x}$.

Calcolare poi, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x^\alpha}$.

- 6) Sono dati i due seguenti sviluppi di Taylor: $f(x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$ e $g(x) = x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^5)$, per $x \rightarrow 0$. Sia $h(x) = f(x) \cdot g(x)$. Quale fra le seguenti affermazioni è falsa? (A) $h(x) = x^3 + o(x^4)$;
 (B) $h(x) = x^3 + \frac{x^5}{6} - \frac{x^7}{6} + o(x^7)$; (C) $h(x) = o(x^2)$; (D) $h(x) = x^3 + \frac{x^5}{6} + o(x^6)$.
- 7) Un polinomio di Taylor centrato in $x_0 = 0$ di $f(x) = e^x \sin x - x(1+x)$ è :
 (A) $x^3/3$; (B) $-x^2$; (C) $-x^3/6$; (D) $x^3/2$.

8) Uno sviluppo di Taylor della funzione $f(x) = \frac{\log(1+3x)}{2x+1}$ nel punto $x_0 = 0$ è : A) $3x - 3/2 x^2 + o(x^2)$;
 B) nessuna delle altre risposte è vera ; C) $3x - 21/2 x^2 + o(x^2)$; D) $3x + 3/2 x^2 + o(x^2)$.

9) Se una funzione $f(x)$ ha in $x_0 = 0$ un punto di minimo locale, allora un suo sviluppo di Taylor centrato in tale punto può essere: A) $f(x) = x + x^2 + o(x^2)$; B) $f(x) = 1 - 5x^2 + o(x^2)$;
 C) $f(x) = -3 + 2x^4 + o(x^4)$; D) $f(x) = 1 + 3x^3 + o(x^3)$

10) Dopo aver calcolato lo sviluppo di Taylor del quarto ordine centrato in $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = 3e^{x^2} - 2\log(x^2 + 1) - x \cdot \frac{1}{1-2x} - 3\cos x + \sin x$, scrivere l'ordine di infinitesimo e la parte principale di $f(x)$ per $x \rightarrow 0$.

11) Approssimare il valore di e con un errore $< 10^{-3}$

12) Approssimare il valore di $\frac{1}{\sqrt{2}}$ con un errore $< 10^{-3}$

13) Approssimare il valore di $\sqrt{65}$ con un errore $< 10^{-4}$

14) Dopo aver calcolato il polinomio di Taylor $P(x)$ di ordine 3 centrato in $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = 2 \cdot (1+x)^{\frac{1}{3}}$, calcolare il valore di $P(1/8)$ e stimare l'errore commesso.

RISULTATI

De L'Hospital: 1) 2 ; 2) $-\infty$; 3) $-1/3$; 4) 0 ; 5) 1 ; 6) 1;

Taylor: 1) $x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$; 2) $\frac{e}{6}(x^3 + 3x + 2) + o((x-1)^2)$;

3) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{1}{6\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{1}{24\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4\right)$;

4) $\frac{95}{3} + \frac{214}{3}(x-2) + 72(x-2)^2 + \frac{112}{3}(x-2)^3 + \frac{29}{3}(x-2)^4 + (x-2)^5 + o(x^n)$; 5) $\frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{6} + o(x^4)$; 0 se α

< 3 , 1 se $\alpha = 3$, $+\infty$ se $\alpha > 3$; 6) (B) ; 7) (A) ; 8) C ; 9) C ; 10) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{25}{6}x^3 - \frac{45}{8}x^4 + o(x^4)$; 11) 2,71805...

con $n = 6$; 12) 0,70733... con $n = 5$; 13) $8 \sum_{k=0}^3 \left(\frac{1/2}{k}\right) \frac{1}{64^k} + \frac{5}{2^{31}}$; 14) 2,0800... ; 5/248832 .