Lezioni 17, 18

STUDIO DI FUNZIONE

1) Data la funzione $f(x) = 3x^5 - 50x^3 + 135x$, determinare il numero di radici reali dell'equazione $f(x) + k = 0$, al variare di $k \in R$.

2) Trovare, al variare di $k \in R$, il numero di soluzioni dell'equazione: $x^4 + 3x^3 - 5x^2 = 3x + k$.

3) Trovare il numero di soluzioni dell'equazione $2x^3 - 3x^2 - 36x + \alpha = 0$, $(\alpha \in R)$.

4) Data la funzione $f(x) = \dfrac{x(2-x)}{8+2x^2}$, disegnarne l'andamento qualitativo e determinare al variare di $T \in R$ il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = T$.

5) Studiare le seguenti funzioni e disegnarne il grafico:

a) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 2x - 1$; b) $f(x) = x^{\frac{4}{3}} - 8x^{\frac{1}{3}}$; c) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - |x+2|}$;

d) $f(x) = x^2 - 2x + 2\log|1 + x|$; e) $f(x) = e^{ax} - a^2x$ (per $x \geq 0$) ; f) $f(x) = \dfrac{k^2}{x} - kx$.

6) Studiare la funzione $f(x) = \min\left\{5, \dfrac{x^2}{|x-1|}\right\}$ e disegnarne il grafico.

7) Studiare la funzione $f(x) = 2x + 2 - 3\cdot\sqrt[3]{(x+1)^2}$, determinandone in particolare dominio, segno, limiti agli estremi del campo di esistenza, intervalli di monotonia, intervalli di concavità. Tracciare poi un grafico della funzione.

8) Studiare la funzione $f(x) = x \cdot e^{-\frac{2}{x}}$, determinando dominio, segno, limiti agli estremi del campo di esistenza, intervalli di monotonia, eventuali massimi e minimi locali. Dopo aver determinato l'equazione dell'asintoto obliquo, stabilire in quali intervalli il grafico della curva sta al di sopra dell'asintoto obliquo e in quali sta al di sotto.

9) Studiare la funzione $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot (x - 6)$, determinando dominio, segno, limiti agli estremi del campo di esistenza, intervalli di monotonia, intervalli di concavità, eventuali massimi e minimi locali. Disegnare il grafico della funzione e trovare il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$, al variare del parametro $k \in R$..

10) Determinare, al variare del parametro $k \in R$, il numero di intersezioni della retta di equazione $y = -2x + k$ con il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$.

11) Determinare, al variare del parametro $k \in R$, il numero di soluzioni $x > 0$ dell'equazione $f(x) = k$ dove $f(x) = x^6 - 18x^3 + 16 \log x^3$.

12) Determinare, al variare del parametro $a \in R$, il numero di soluzioni delle seguenti equazioni:

a) $e^{\frac{1}{x}} - ax = 0$; b) $\dfrac{2}{3}x^3 + a - 2\log x = 0$

13) Dimostrare che il grafico della funzione $f(x) = x^{100} + ax + b$ interseca l'asse delle ascisse al massimo in due punti .

RISULTATI:

1) 1 soluz. per $k < -216$ e per $k > 216$, 2 soluz. per $k = -216$ e per $k = 216$, 3 soluz. per $-216 < k < -88$ e per $88 < k < 216$, 4 soluz. per $k = -88$ e per $k = 88$, 5 soluz. per $-88 < k < 88$; **2)** 1 soluz. per $k = -36$, 2 soluz. per $-36 < k < -4$ e per $k > 101/256$, 3 soluz. per $k = -4$ e per $k = 101/256$, 4 soluz. per $-4 < k < 101/256$; **3)** 1 soluz. per $\alpha < -44$ e per $\alpha > 81$, 2 soluz. per $\alpha = -44$ e per $\alpha = 81$, 3 soluz. per $-44 < \alpha < 81$; **4)** asintoto $y = -1/2$, min $\left(-2-2\sqrt{2}, -\frac{1+\sqrt{2}}{4}\right)$, max $\left(-2+2\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}-1}{4}\right)$, 1 soluz. per $T = -\frac{1+\sqrt{2}}{4}$, $T = \frac{\sqrt{2}-1}{4}$, $T = -1/2$, 2 soluz. per $-\frac{1+\sqrt{2}}{4} < T < -1/2$ e per $-1/2 < T < \frac{\sqrt{2}-1}{4}$; **5)** a) min $(1/2 , -27/16)$, $F_1 (-1 , 0)$, $F_2 (0 , -1)$; b) min $(2 , -6\sqrt[3]{2})$, $F_1 (-4 , 12\sqrt[3]{4})$, $F_2 (0 , 0)$; c) max $(0 , 0)$, max $(-4 , 8/7)$, min 8- 2, 1) , $x = -1$ e $x = 2$ asintoti verticali, $y = 1$ asintoto orizzontale; d) $F_1 (-2 , 8)$, $F_2 (0 , 0)$; e) per $a > 1$ min $((1/a) \cdot \log a , a \cdot (1 - \log a))$, per $a < 0$ funzione decrescente , per $0 < a \leq 1$ funzione crescente ; f) per $k < 0$ min $(\sqrt{-k}, -2k\sqrt{-k})$ e max $(-\sqrt{-k}, 2k\sqrt{-k})$, per $k > 0$ funzione decrescente; **6)** $\min_1 (0 , 0)$, $\min_2 (2 , 4)$, funzione costante $f(x) = 5$ per $x \leq \frac{-5-3\sqrt{5}}{2}$, per $\frac{-5+3\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{5-\sqrt{5}}{2}$ e per $x \geq \frac{5+\sqrt{5}}{2}$; **7)** $f(x)$ crescente per $x < -1$ e per $x > 0$, $x = 0$ min. locale, $x = -1$ max. locale, $f(x)$ convessa $\forall\, x \neq -1$; **8)** asintoto $y = x - 2$, max $(-2 , -2e)$; **9)** una soluzione per $k < -4 \cdot e^{-1/4}$ e per $k \geq 0$, due soluz. per $k = -4 \cdot e^{-1/4}$, tre soluz. per $-4 \cdot e^{-1/4} < k < 0$; **10)** $k < 7$ una soluzione, $k = 7$ due soluz. , $k > 7$ tre soluz. ; **11)** per $k < 48\log 2 - 80$ o $k > -17$ una soluzione , per $k = 48\log 2 - 80$ e $k = -17$ due soluz. , per $48\log 2 - 80 < k < -17$ tre soluz. **12)** a) 2 soluz. per $-1/e < a < 0$, 1 soluz. per $a = -1/e$ e per $a > 0$; 1 soluz. per $a = -2/3$, 2 soluz. per $a < -2/3$; .