

DERIVATE

1) Calcolare la derivata prima delle seguenti funzioni:

a) $f(x) = \sin^2 x + \cos x$; b) $f(x) = x^2 \cdot \sin^3 x$; c) $f(x) = (x + \sin x)^5$; d) $f(x) = x^3 \cdot e^x + \cos^3 x$;

e) $f(x) = \sin(\sin x)$; f) $f(x) = e^{x \cos x}$; g) $f(x) = e^{\sin x} + \cos(x + \sin x)$; h) $f(x) = e^{x^2} \cdot \cos x^2$;

i) $f(x) = \frac{2\sqrt[3]{x} + 3}{x^3 + x + 1}$; l) $f(x) = \sqrt{\frac{2x^2 + 1}{x^4 + 2}}$; m) $f(x) = \log \frac{1+x}{x^3}$; n) $f(x) = \frac{\log(3x^2 + 2)}{\sqrt{x^5 - 1}}$.

2) Sia $f(x)$ da \mathbb{R} ad \mathbb{R} una funzione derivabile. Calcolare la derivata della funzione $g(x) = [x \cdot f(x)]^2$.

3) La derivata di $f(x) = \cos(e^{x^2})$ è: A) $f'(x) = -e^{x^2} \cdot \sin(e^{x^2})$; B) $f'(x) = -e^{-2x} \cdot \sin(e^{x^2})$; C) $f'(x) = -2x \cdot e^{x^2} \cdot \sin(e^{x^2})$; D) $f'(x) = -2x \cdot \sin(e^{x^2})$

4) Date due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ da $[0, 2]$ ad \mathbb{R} , derivabili in $]0, 2[$, determinare le condizioni per le quali

risulta derivabile in $]0, 2[$ la funzione $h(x) = \begin{cases} f(x) & 0 \leq x \leq 1 \\ g(x) & 1 < x \leq 2 \end{cases}$

5) Stabilire se la funzione $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ è derivabile in $x = 0$.

6) Data la funzione $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x \leq c \\ 3ax + b & x > c \end{cases}$ determinare a, b in funzione di c affinché esista $f'(c)$.

7) Discutere la derivabilità in \mathbb{R} della seguente funzione: $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

8) Determinare il valore dei parametri a e b in modo che la funzione $f(x)$ abbia derivata prima continua

su tutto \mathbb{R} : $f(x) = \begin{cases} e^{1-x} - ax & x \leq 1 \\ bx^2 + 3x - 3 & x > 1 \end{cases}$

9) La funzione $f(x) = \begin{cases} a \sin(2x) + b \cos(3x) + x, & x \leq 0 \\ ae^x + b \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + 1, & x > 0 \end{cases}$ è derivabile se e solo se a e $b \in \mathbb{R}$ verificano:

A) a qualsiasi, $b = 2a + 2$; B) nessuna delle altre risposte è vera ; C) $a = -1$ e $b = 0$; D) $a = 1$ e $b = 2$.

10) Determinare il valore dei parametri a, b e c in modo che la funzione $f(x)$ abbia derivata seconda

continua su tutto \mathbb{R} : $f(x) = \begin{cases} ax + b + x^2 & x < 1 \\ ce^{x-1} + x^3 & x \geq 1 \end{cases}$

11) Quale fra le seguenti proposizioni è vera? (A) $f(x)$ derivabile in $[-1, 1] \Rightarrow f'(x)$ continua in $[-1, 1]$; (B) $f(x)$ derivabile in $[-1, 1] \Rightarrow f(x)$ ha massimo su $[-1, 1]$; (C) $f(x)$ derivabile in $[-1, 1] \Rightarrow f(x)$ ha limite per $x \rightarrow -1^+$; (D) $f(x)$ derivabile in $[-1, 1] \Rightarrow f(x)$ inferiormente limitata.

12) Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x) = \log(2 + x^2)$ in corrispondenza del punto di ascissa $x_0 = -1$.

13) Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x) = (x + 2)^{x+3}$ in corrispondenza del punto di ascissa $x_0 = 0$.

14) Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x) = x^3$ nel punto di ascissa x_0 . Il grafico della cubica $f(x) = x^3$ si trova sempre al di sopra delle sue rette tangenti?

15) Sia $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$, allora: A) $f(x)$ ha minimo su $]0, +\infty[$; B) $f(x) \rightarrow -\infty$ quando $x \rightarrow -\infty$; C) $f(x)$ ha massimo su \mathbb{R} ; D) $f(x)$ è decrescente in $] -\infty, 0[$.

16) Determinare i valori minimo e massimo della funzione $f(x) = \sqrt{1 - x^2} + \left| x + \frac{1}{2} \right|$.

17) Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che: $f(0) = 1$, $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$ e $f^{iv}(0) = -2$.

Quale fra le seguenti risposte è certamente vera? A) $x = 0$ è punto di massimo assoluto; B) nessuna delle altre risposte è vera; C) $x = 0$ è punto di minimo relativo; D) $x = 0$ è punto di flesso.

18) Se $f: [0, 1] \cup [2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ ha derivata sempre maggiore di 5, allora:

A) $f(1) > 5 + f(0)$; B) f è crescente; C) $f(3) > 5 \cdot f(0)$; D) $\frac{f(3) - f(0)}{3} > 5$

19) Data la funzione $f(x) = x + \log x + e^x$, calcolare la derivata di $f^{-1}(x)$ in $x = e + 1$.

20) Verificare che $\arctg(x) + \arctg(1/x) = \frac{\pi}{2}$ per ogni $x > 0$.

21) Data la funzione $f(x) = \log x - \frac{1}{\log x}$, calcolare la derivata di $f^{-1}(x)$ in $x = 0$.

22) La funzione inversa di $f(x) = 3x + \cos x$: (A) è derivabile su \mathbb{R} ; (B) è $f^{-1}(y) = 1/3 y + \arccos y$; (C) è $f^{-1}(y) = \frac{1}{3y + \cos y}$; (D) non esiste perché la funzione $\cos x$ è periodica.

23) Data la funzione $f(x) = 5x + x^3 + 2x^5$, scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $f^{-1}(x)$ nel suo punto di ascissa 8.

24) Data la funzione $f(x) = 4x - \sin x + 5$, scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $f^{-1}(x)$ nel suo punto di ascissa $4\pi + 5$.

25) Stabilire se la seguente funzione è monotona: $f(x) = 12x - 2x^3 - 3x^2 - 1$.

Dopo aver determinato i massimi e i minimi locali di $f(x)$, determinare, al variare del parametro k , il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.

26) Sia $f(x)$ funzione da \mathbb{R} ad \mathbb{R} con $f'(x)$ continua in \mathbb{R} ; se $g(x) = x \cdot f(x)$ ha minimo locale in $x = 0$, allora: (A) $f(0) = 0$ e $f'(0) = 0$; (B) $f(0) = 0$ e $f''(0) > 0$; (C) $f(0) = 0$ e $f'(0) \geq 0$; (D) $f(x)$ ha minimo locale in $x = 0$.

RISULTATI:

3) C; 6) $a = 2/3$, $c = 2 - c^2$; 7) non deriv. in $x = 0$; 8) $a = 6$, $b = -5$; 9) C; 10) $a = -3$, $b = -1$, $c = -4$; 11) (B); 12) $y = \log 3 - 2/3 - 2/3 x$; 13) $y = 8 + 8(\log 2 + 3/2)x$; 14) $y = 3x_0^2 x - 2x_0^3$, no; 15) C; 16) min. $(-1, 1/2)$, max.

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2} + \sqrt{2} \right)$; 17) B; 18) A; 19) $1/(2 + e)$; 21) $1/(2e)$; 22) (A); 23) $y = 1/18 x + 5/9$; 24) $x - 5y + \pi - 5 = 0$;

25) crescente per $-2 < x < 1$; $m(-2, -21)$, $M(1, 6)$; 1 soluz. per $k < -21$ e per $k > 6$, 3 soluz. per $-21 < k < 6$, 2 soluz. per $k = -21$ e per $k = 6$; 26) (C).