

SERIE:

1) Calcolare:

$$a) \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n ; \quad b) \sum_{n=4}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{n!} ; \quad c) \sum_{n=6}^{+\infty} \frac{5}{(n-1)(n-2)} ; \quad d) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(3^{\frac{1}{2n-1}} - 3^{\frac{1}{2n+1}}\right)$$

2) Discutere la convergenza delle seguenti serie:

$$a) \sum_n \left(\frac{4n+1}{3n+2}\right)^n ; \quad b) \sum_n \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}\right) ; \quad c) \sum_n \left(\frac{3n+2}{4n+1}\right)^n ; \quad d) \sum_n \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}\right) ; \quad e) \sum_n \left(\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n - 1\right) ;$$

$$f) \sum_n \left(\frac{n}{1+n\sqrt{1+n^3}}\right) ; \quad g) \sum_n \log\left(\frac{2+n^2}{1+n^2}\right) ; \quad h) \sum_n \left(\frac{e^{\frac{-1}{n}} - \cos\frac{1}{n} + \frac{1}{n}}{\frac{1}{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}}\right) ; \quad i) \sum_n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} ; \quad l) \sum_n \frac{(2n)!}{5^n \cdot (n!)^2} ;$$

$$m) \sum_n \cos\left(n\frac{\pi}{6}\right) \cdot \frac{1}{n^2} ; \quad n) \sum_n \frac{\sin(n) - 2\cos(2n)}{2^n} ; \quad o) \sum_n \frac{(-1)^n}{n - \sqrt{n}} ; \quad p) \sum_n \frac{(-1)^n}{n^2 - n \cdot \sin^2(n)} ;$$

$$q) \sum_n (-1)^n \left(1 - \cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right) ; \quad r) \sum_n \left(\frac{2n + \cos(n)}{\sqrt[3]{n^3 + 2n^2 + 8}}\right)^{\frac{n^2+2n}{3n+\arctg(n)}} ; \quad s) \sum_n \frac{\cos(n\pi)}{e^n - n^5} ; \quad t) \sum_n \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n} .$$

3) Per quali valori di q (q reale positivo) converge la serie $\sum_n \frac{q^{n+\sin(n)} \cdot \sin(n)}{\sqrt{2+\sin(n)}}$?

4) Se $\alpha < 0$, la serie $\sum_n n^{-3\alpha} \cdot \sin(n^{4\alpha})$: (A) diverge per ogni $\alpha < 0$; (B) converge se $\alpha > -1$;
(C) converge se $\alpha < -1/4$; (D) converge se $\alpha < -1$.

5) Per quali valori di α (α reale) converge la serie $\sum_n \frac{2^{n\alpha}}{4^{(\alpha-2)n}}$?

(A) per ogni $\alpha > 4$; (B) per ogni $\alpha > 1$; (C) per ogni $\alpha < 1$; (D) per ogni $\alpha < -2$.

6) Per quali valori di α (α reale) converge la serie $\sum_n \left[n \sin(n^\alpha) + (2+\alpha)^{2n} \right]$?

(A) $\alpha < -2$; (B) $|\alpha + 2| < 1$; (C) $-3 < \alpha < -2$; (D) $-3 < \alpha < -2$ o $\alpha > -1$.

7) La serie $\sum_n \left(n^{\alpha-4} + |\alpha-1|^{-n} \right)$ è convergente se: (A) $3 < \alpha$; (B) $\alpha < 0$ o $2 < \alpha < 3$; (C) $1 < \alpha < 2$; (D) $1 < \alpha$

8) Dato il parametro $q > 0$, per ogni $n \geq 1$ sia $a_n = \sum_{k=1}^n q^k$. a) Calcolare esplicitamente a_n in funzione

di q e determinare $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$. b) Discutere al variare di $q > 0$ la convergenza della serie $\sum_n \left(q \cdot a_n \right)^n$.

9) Studiare il carattere delle seguenti serie al variare del parametro α :

a) $\sum_n \frac{(-1)^n \cdot n + \sqrt{n}}{n^\alpha}$; b) $\sum_n (-1)^n \cdot n^\alpha \cdot \left(1 - e^{\frac{1}{n}}\right)$; c) $\sum_n \frac{(-1)^n \cdot \log(n)}{n^\alpha}$

10) Stabilire per quali valori di x la seguente serie converge: $\sum_n \frac{(6-2x)^n}{2^n \cdot (x-1)^{2n}}$

11) a) Calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(1+x^2)}{\log x}$. b) Posto $f(x) = \frac{\log(1+x^2)}{x \cdot \log x}$ e $a_n = f(n)$, determinare i valori di α

per i quali risulta convergente la serie $\sum_n n^\alpha \cdot a_n$.

12)a) Determinare per quali valori di $\beta \in \mathbb{R}$ si ha $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{(n^\beta)} = 1$. b) Determinare poi per quali

valori di β converge la serie $\sum_n \left(\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{(n^\beta)} - 1 \right)$

13) Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie $\sum_n \left| \sin\left(\frac{2}{n}\right) + e^{-\frac{1}{n}} \cdot \log\left(\frac{n-2}{n}\right) \right|^\alpha$

14) Determinare per quali valori di x converge la serie $\sum_n \left(\frac{x}{x^2-1} \right)^n$ e calcolarne la somma.

RISULTATI:

1) a) $1/12$; b) $e^{1/2} - 79/48$; c) $5/4$; d) 2 ; **2)** a) diverge; b) diverge ; c) converge; d) converge ; e) diverge ; f) conv. ; g) conv. ; h) conv. ; i) conv. ; l) conv. ; m) conv. ; n) conv. ; o) conv. ; p) conv. ; q) conv. ; r) div. ; s) conv. ; t) div. ;

3) $q < 1$; **4)** (D) ; **5)** (A) ; **6)** (C) ; **7)** (B) ; **8)** b) se $0 < q < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ converge, se $q > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ diverge.;

9) a) converge se $\alpha > 3/2$; b) converge assolutamente se $\alpha < 0$, converge semplicemente se $0 \leq \alpha < 1$; c) converge assolutamente per $\alpha > 1$, converge semplicemente per $0 < \alpha \leq 1$; **10)** converge per $x < -1$ o $x > 2$; **11)** a) 2 ; b) $\alpha < 0$; **12)** a) $\beta < 2$; b) $\beta < 1$; **13)** $\alpha > 1/3$;

14) $\left] -\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \right[\cup \left] \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right[\cup \left] \frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty \right[$.