Lezioni 10 – 11

INFINITESIMI E CALCOLO DI LIMITI

1) Calcolare: a) $(x^2 + o(x^2))^3$; b) $\dfrac{\circ(x^2)}{x}$; c) $o(x^3 + o(x^4))$; d) $o(x + x^3 - o(x^4))^2$

2) Sviluppare fino all'ordine indicato le seguenti funzioni:

a) $f(x) = x \cdot \text{sen}x \cdot \log(1 + x)$ fino al 5° ordine ; b) $f(x) = e^{x^2} - 1 - \text{sen}^2 x$ fino al 4° ordine ;
c) $f(x) = \log(1 + x^3) + \text{sen}x - x$ fino al 3° ordine.

3)Calcolare ordine e parte principale per $x \to 0$ di:

a) $f(x) = 1 - \cos x$; b) $f(x) = x - \text{sen}x$; c) $f(x) = \cos x - 1 + \text{tg}x$; d) $f(x) = 2x^2\text{sen}^2 x$;

e) $f(x) = \text{sen}(\cos x - 1)$; f) $f(x) = (1 + x)^\alpha - 1$; g) $f(x) = \sqrt[3]{x + x^2} - \sqrt[3]{x} + x^2$; h) $f(x) = \dfrac{1-\cos(x + x^2)}{\text{sen}^2 x}$

i) $f(x) = \left(1-\cos^2 x\right)^2 - \left(\log\left(1+x^2\right)\right)^2$; calcolare inoltre $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha \cdot f(x)$

4) Calcolare ordine e parte principale per $x \to \pi/2$ di: $f(x) = \text{sen}(\cos x)$

5) Calcolare ordine e parte principale per $x \to +\infty$ di: $f(x) = \dfrac{2x^2+3}{x^4-1}$

6) Date $f(x) = (x - \text{sen}x)^2$ e $g(x) = x - \log(1 + x)$, calcolare l'ordine di infinitesimo di $f(x) / g(x)$.

7) Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2sen(x-1)}{x^2-1}\cdot\dfrac{e^{x^2-1}-1}{x-1}$; b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1-\cos(x+1)}{x+1}\cdot\dfrac{3(x-1)}{e^{x^2-1}-1}$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot sen\left(\log\dfrac{x+1}{x+2}\right)$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x\log(1+x)}{1-\cos x}\right)^{3-x}$; e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{xsenx}$; f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot \text{sen}x}{1+\cos x-2\cos^2 x}$; g) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{senx-1}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}$;

h) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot\left(1-e^{\frac{x}{1+x^2}}\right)$; i) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\cdot\left(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{1+x}}\right)$; l) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1-sen^2x}{x-senx}$; m) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{1-sen(\pi x)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}$;

n) $\lim\limits_{x\to\pi}\left(\dfrac{1}{senx}+(tgx)^{-1}\right)$; o) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\text{tg}^3 x}-1}{x\cdot(\cos x-e^{x^2})}$; p) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2-sen^2x}{\left(1+2x^2\right)^{-1}-\cos 2x}$;

q) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}\cos 2x+\log(1-3x)-(1-x^2)^2}{x-senx}$; r) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-senx}{6senx\cdot\left(1+3x^2\right)^{-1}-6x+19x^3}$.

8) Determinare il valore del parametro α in modo che il seguente limite sia un numero finito e trovare il valore del limite: $\lim\limits_{x\to 0} x^{-2}\cdot(e^{\alpha x}-e^x-x)$

9) Determinare i valori dei parametri a e b in modo che il $\lim\limits_{x\to 0}(x^{-3}\cdot \text{sen}3x + ax^{-2} + b)$ valga 0.

10) Calcolare, al variare del parametro reale α, i seguenti limiti:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{senx}}{x^\alpha}$; b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{x}{e^x-1}+\dfrac{x^\alpha}{x-senx}\right)$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{|x|^\alpha+x^2}$; d) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-senx}{(1-x)^{-1}\cos x-e^x-\frac{x^\alpha}{3}}$

e) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{sen(x)^2-sen^2x-\frac{x^\alpha}{3}}{\left(1+x^2\right)\log(1+x^2)-e^{x^2}+1}$; f) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos(x^2)-(1-\cos x)^2-\frac{x^\alpha}{4}}{\left(1+x^2\right)^{-1}\log(1+x^2)-sen(x^2)+3\frac{x^\alpha}{2}}$

RISULTATI:

3) a) ordine 2, parte principale $x^2/2$; b) ord. 3, p.p. $x^3/6$; c) ord. 1, p. p. x ; d) ord. 4 , p.p. $2x^4$; e) ord. 2, p.p. $-x^2/2$; f) ord. 1, p.p. αx ; g) ord. 4/3 , p.p. $\frac{1}{3}x^{\frac{4}{3}}$; h) ord. 0 , p. p. 1/2 ; i) ord. 6 , p.p. $x^6/3$; lim. = 0 se $\alpha > -6$, lim. = 1/3 se $\alpha = -6$, lim. = $+\infty$ se $\alpha < -6$; 4) ord. 1, p.p. $-(x - \pi/2)$; 5) ord. 2, p.p. $2/x^2$; 6) ord. 4, p.p. $x^4/18$; 7) a) 2 ; b) 3/2 ; c) – 1; d) 8 ; e) 1 ; f) 2/3 ; g) – 1/2 ; h) – 1 ; i) 1 ; l) 0 ; m) $\pi^2/2$; n) 0 ; o) – 2/3; p) 1/10 ; q) – 63 ; r) $+\infty$; 8) $\alpha = 2$ e lim. = 3/2 ; 9) a = - 3 e b = 9/2 ; 10) a) 1/6 se $\alpha = 3$, 0 se $\alpha < 3$, $+\infty$ se $\alpha > 3$; b) 7 se $\alpha = 3$, 1 se $\alpha > 3$, $+\infty$ se $\alpha < 3$; c) 1/4 se $\alpha = 2$, 1/2 se $\alpha > 2$, 0 se $\alpha < 2$; d) $+\infty$ se $\alpha = 3$, 0 se $\alpha < 3$, 1/2 se $\alpha > 3$; e) 19/30 se $\alpha = 4$, $+\infty$ se $\alpha < 4$, $-\infty$ se $\alpha > 4$; f) 1/48 se $\alpha = 4$, - 1/6 se $\alpha \neq 4$.