Titolo nota 19/11/2012

Ricerca delle primitive

Def: Data una funzione $f: I \to \mathbb{R}$

una funzione $F: I \to \mathbb{R}$ si dice

"primitiva di f" se $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$

Esempi

$f(x) = x^n \longrightarrow F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ è una primitiva

$f(x) = \operatorname{sen} x \longrightarrow F(x) = -\cos x$ " " "

$f(x) = \cos x \longrightarrow F(x) = \operatorname{sen} x$ " " "

$f(x) = 1/x \longrightarrow F(x) = \log|x|$ " " "

$f(x) = e^x \longrightarrow F(x) = e^x$ " " "

Oss La derivata di f è unica, mentre di primitive ne esistono infinite

$F(x)$ primitiva di $f(x) \Rightarrow F(x) + c$ primitiva di $f(x)$ $\forall c \in \mathbb{R}$

Teorema

F e G primitive di f su I

allora $\exists c \in \mathbb{R}$ t.c. $F(x) = G(x) + c \quad \forall x \in I$

dim

$$[F-G]'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \forall x \in I \text{ intervallo}$$

$$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} \text{ t.c. } F(x) - G(x) = c \quad \forall x \in I$$

Def Data $f: I \to \mathbb{R}$, diciamo

"integrale indefinito di f" su I

$$\int f(x)\,dx = \{F: I \to \mathbb{R} : F \text{ primitive di } f\}$$

Esempio

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

Oss

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)$$

$$\int\left(\frac{df(x)}{dx}\,dx\right) = f(x) + c$$

Esempio (una funzione senza primitiva)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$ non ha primitiva

dim

Supponiamo $\exists\, F(x)$ primitiva allora

$$F'(x) = 0 \quad \forall x \neq 0 \Rightarrow F(x) = \begin{cases} c_1 & x < 0 \\ c_2 & x > 0 \end{cases}$$

Ma F è derivabile $\Rightarrow F$ continua $\Rightarrow \lim_{x \to 0^-} F = \lim_{x \to 0^+} F$

$\Rightarrow F(x) = c_1 = c_2 = F(0) \Rightarrow F(x)$ è una costante su $\mathbb{R}$

$\Rightarrow F'(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow F'(0) = 0 \neq 1 = f(0)$ ↯

Una volta calcolate le primitive delle funzioni elementari, è necessario forgiare le regole per calcolare primitive di funzioni più complesse

Oss: calcolare la derivata di una funzione è una operazione meccanica che, se possibile, non presenta difficoltà

viceversa il calcolo esplicito della primitiva (ovvero la sua espressione in termini di funzioni elementari) non è sempre possibile

L'esistenza di una primitiva di una funzione continua è garantita dal Teorema fondamentale del calcolo integrale

$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) \implies \int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

$(f\cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \implies$ integrazione per parti

$(g\circ f)'(x) = g'(f(x))\cdot f'(x) \implies$ " per sostituzione

Teorema (Primitive somme = Somme primitive)

$f, g : I \to \mathbb{R} \implies \int (f+g)(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

Esempio Calcolare $\int \frac{dx}{x(x+1)}$

$$\int \frac{dx}{x(x+1)} = \int \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right] dx =$$

$$= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x+1} = \log|x| - \log|x+1| + c$$

$c \in \mathbb{R}$

Esempio Calcolare $\int (x+e^x)dx$

$$\int (x+e^x)dx = \int x dx + \int e^x dx = \frac{x^2}{2} + e^x + c$$

$c \in \mathbb{R}$

Formula Leibnitz

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad \forall x \in I$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x)g(x) = (fg)'(x) - f(x)g'(x) \quad \forall x \in I$$

$$\Downarrow$$

$$\int f'(x)g(x)\,dx = \int (fg)'(x)\,dx - \int f(x)g'(x)\,dx$$

$$\Downarrow$$

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

Teorema (Integrazione per parti)

Data $f, g : I \to \mathbb{R}$, g derivabile, $F : I \to \mathbb{R}$ primitiva di f

allora

$$\int f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)\cdot g'(x)\,dx$$

dim

$$\frac{d}{dx}\int f(x)g(x)\,dx = f(x)g(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\right] = f(x)g(x) + \cancel{F(x)g'(x)} - \cancel{F(x)g'(x)}$$

Esercizio: Calcolare $\int x e^x dx$

dim

$$\int \underset{u'}{x}\ \underset{v}{e^x} dx = \underset{u}{\frac{x^2}{2}} \cdot \underset{v}{e^x} - \int \underset{u}{\frac{x^2}{2}} \underset{v'}{e^x} dx$$

e abbiamo peggiorato la situazione

$$\int \underset{u}{x} \underset{v'}{e^x} dx = \underset{u}{x}\ \underset{v}{e^x} - \int \underset{u'}{1} \cdot \underset{v}{e^x} dx = x e^x - e^x + c$$

$c \in \mathbb{R}$

Esempio Calcolare $\int x^2 e^x dx$

$$\int \underset{u}{x^2} \underset{v'}{e^x} dx = \underset{u}{x^2} \underset{v}{e^x} - \int \underset{u'}{2x} \underset{v}{e^x} dx$$

$$= x^2 e^x - 2 \int x e^x dx \ \text{----}$$

$$= x^2 e^x - 2 \left(x e^x - e^x \right) + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

Esempio Calcolare $\int \operatorname{sen}^2 x \, dx$

$$\int \underset{u'}{\operatorname{sen} x}\ \underset{v}{\operatorname{sen} x} = \underset{u}{(-\cos x)} \cdot \underset{v}{\operatorname{sen} x} - \int \underset{u}{(-\cos x)} \underset{v'}{(\cos x)} dx$$

$$= -\operatorname{sen} x \cos x + \int \left(1 - \operatorname{sen}^2 x\right) dx$$

$$= -\operatorname{sen} x \cos x + \int 1 \cdot dx - \int \operatorname{sen}^2 x \, dx$$

$$\Rightarrow \quad 2\int \operatorname{sen}^2 x \, dx = x - \operatorname{sen} x \cos x + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad \int \operatorname{sen}^2 x \, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{sen} x \cos x + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

Esempio Calcolare $\int \cos^2 x \, dx$

$$\int \cos^2 x \, dx = \int (1 - \operatorname{sen}^2 x) \, dx = x - \int \operatorname{sen}^2 x \, dx$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sen} x \cos x + c$$

$$c \in \mathbb{R}$$

Esercizio Calcolare $\int \sqrt{1-x^2} \, dx$

Ricordiamo che $\dfrac{d\sqrt{1-x^2}}{dx} = \dfrac{1}{\cancel{2}_1}(1-x^2)^{-1/2} \cdot (-\cancel{2}^{1}x) = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\int \sqrt{1-x^2} \, dx = \int \underset{u'}{1} \cdot \underset{v}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \underset{u}{x} \cdot \underset{v}{\sqrt{1-x^2}} - \int \underset{u}{x} \cdot \underset{v'}{\left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)} dx$$

$$= x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2 - 1 + 1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

$$= x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2} \, dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Downarrow$$

$$2\int \sqrt{1-x^2} \, dx = x\sqrt{1-x^2} + \operatorname{arcsen} x + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$\int \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{1}{2} \operatorname{arcsen} x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

Esempio Calcolare $\int \log x \, dx$

$$\int \log x \, dx = \int 1 \cdot \log x \, dx = x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= x \log x - \int 1 \cdot dx$$

$$= x \log x - x + c \quad c \in \mathbb{R}$$

Esempio Calcolare $\int \operatorname{arctg} x \, dx$

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx = \int 1 \cdot \operatorname{arctg} x \, dx = x \operatorname{arctg} x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) + c$$

$c \in \mathbb{R}$

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) f'(x) \quad \forall x \in I$$

$$\Downarrow$$

$$\int (g \circ f)'(x) dx = g'(f(x)) f'(x) dx$$

$$\Downarrow$$

$$\int g'(f(x)) f'(x) dx = g(f(x)) + c \quad c \in \mathbb{R}$$

Teorema (Integrazione per sostituzione)

Sia $\varphi : I \to J$ derivabile

$g : J \to \mathbb{R}$ e sia $G : J \to \mathbb{R}$ una primitiva

Allora $$\int (g \circ \varphi)(x) \cdot \varphi'(x)\,dx = (G \circ \varphi)(x) + c \quad c \in \mathbb{R}$$
$$= G(\varphi(x)) + c \quad c \in \mathbb{R}$$

dim

$$\frac{d}{dx} \int (g\circ\varphi)(x) \cdot \varphi'(x)\,dx = g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$

$$\frac{d}{dx} (G \circ \varphi)(x) = G'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$

Esempio Calcolare $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \left(\int \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx}\,dx\right)_{y=f(x)} = \left(\int \frac{dy}{y}\right)_{y=f(x)}$$

$y = f(x)$

$\dfrac{dy}{dx} = f'(x)$

$$= \left(\log|y| + c\right)_{y=f(x)} \quad c \in \mathbb{R}$$

$$= \log|f(x)| + c \quad c \in \mathbb{R}$$

Oss $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + c$ infatti $\displaystyle(\log|x|)' = \frac{1}{|x|} \cdot \frac{x}{|x|} = \frac{1}{x}$

poiché $\displaystyle(|x|)' = \frac{x}{|x|} \quad \forall x \neq 0$

Esempio Calcolare $\int \mathrm{Tg}\,x\,dx$

$$\int \mathrm{Tg}\,x\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = -\log|\cos x| + c$$

$c \in \mathbb{R}$ ✓

Esempio Calcolare $\int \cos(x^3)\cdot x^2\,dx$

$$\int \cos(x^3)\cdot x^2\,dx = \left(\int \cos(y)\cdot \frac{1}{3}\frac{dy}{dx}\,dx\right)_{y=x^3}$$

$y = x^3$

$\frac{dy}{dx} = 3x^2$

$$= \left(\frac{1}{3}\int \cos y\,dy\right)_{y=x^3} = \left(-\frac{\operatorname{sen} y}{3} + c\right)_{y=x^3} \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\int \cos(x^3)\cdot x^2\,dx = -\frac{\operatorname{sen} x^3}{3} + c \qquad c \in \mathbb{R}$$ ✓

Esempio Calcolare $\int \frac{1}{x\log x}\,dx$

$$\int \frac{1/x}{\log x}\,dx = \left(\int \frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}\,dx\right)_{y=\log x} = \left(\int \frac{dy}{y}\right)_{y=\log x}$$

$y = \log x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$

$$= \log|\log x| + c \qquad c \in \mathbb{R}$$ ✓

Esempio calcolare $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

Per far sparire la radice, conviene porre $x = \operatorname{sen} t$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx \underset{x=\operatorname{sen} t}{=} \left(\int \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\,\frac{dx}{dt}\,dt\right)_{x=\operatorname{sen} t}$$

$\frac{dx}{dt} = \cos t$

$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

in modo che sen x ↗

$$= \left(\int |\cos t| \cdot \cos t\,dt\right)_{x=\operatorname{sen} t}$$

$\cos x > 0$

quando $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$$= \left(\int \cos^2 t\,dt\right)_{x=\operatorname{sen} t}$$

$$= \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t \cos t + c\right)_{x=\operatorname{sen} t} \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{\arcsin x}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(\arcsin x)\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\arcsin x)} + c$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}\,x\sqrt{1-x^2} + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

N.B. la funzione e^{-x^2} ha primitive che non sono esprimibili in termini di funzioni elementari

Il metodo di sostituzione dice che

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = (F\circ\varphi)(x) + c, \quad c\in\mathbb{R}$$

$$\parallel$$

$$\left(\int f(y)\,dy\right)_{y=\varphi(x)}$$

Dunque

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad c\in\mathbb{R} \qquad n\neq -1$$

$$\Downarrow$$

$$\int (\varphi(x))^n\cdot\varphi'(x)\,dx = \frac{(\varphi(x))^{n+1}}{n+1} + c \quad c\in\mathbb{R}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \log|x| + c \quad c\in\mathbb{R}$$

$$\Downarrow$$

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,dx = \log|\varphi(x)| + c \quad c\in\mathbb{R}$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + c, \quad c\in\mathbb{R}$$

$$\Downarrow$$

$$\int \operatorname{sen}(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = -\cos(\varphi(x)) + c \quad c\in\mathbb{R}$$

$$\int \cos(x)\,dx = \operatorname{sen} x + c \quad c\in\mathbb{R}$$

$$\Downarrow$$

$$\int \cos(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \operatorname{sen}(\varphi(x)) + c \quad c\in\mathbb{R}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\int e^x\,dx = e^x + c \qquad c\in\mathbb{R}\\ \Downarrow \\ \int e^{\varphi(x)}\cdot\varphi'(x)\,dx = e^{\varphi(x)} + c \qquad c\in\mathbb{R}\end{gathered}}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arcTg}(x) + c \qquad c\in\mathbb{R}\\ \Downarrow \\ \int \frac{\varphi'(x)}{1+\varphi^2(x)}\,dx = \operatorname{arcTg}\left(\varphi(x)\right) + c \qquad c\in\mathbb{R}\end{gathered}}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\int \left(1+\operatorname{Tg}^2(x)\right)dx = \operatorname{Tg}(x) + c \qquad c\in\mathbb{R}\\ \Downarrow \\ \int \left[1+\operatorname{Tg}^2(\varphi(x))\right]\varphi'(x)\,dx = \operatorname{Tg}\left(\varphi(x)\right) + c, \qquad c\in\mathbb{R}\end{gathered}}$$

Esempio Calcolare $\int \frac{dx}{x^2+2x+3}$

$$\frac{1}{x^2+2x+3} = \frac{1}{x^2+2x+1\ +2} = \frac{1}{(x+1)^2+2}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+3} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{1+y^2}\cdot\frac{dy}{dx}\,dx\right)_{y=\frac{x+1}{\sqrt{2}}}$$

$y = \frac{x+1}{\sqrt{2}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dy}{1+y^2}\right)_{y=\frac{x+1}{\sqrt{2}}}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\, y + c\right)_{y=\frac{x+1}{\sqrt{2}}}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+3} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

Esempio Calcolare $\int \frac{1}{x^2+4x+1}\,dx$

$$\frac{1}{x^2+4x+1} = \frac{1}{(x+2)^2-3} = \frac{1}{(x+2-\sqrt{3})(x+2+\sqrt{3})}$$

$$= \frac{A}{x+2-\sqrt{3}} + \frac{B}{x+2+\sqrt{3}}$$

$$= \frac{Ax+(2+\sqrt{3})A + Bx + B(2-\sqrt{3})}{x^2+4x+1}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A(2+\sqrt{3})+B(2-\sqrt{3})=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=-B \\ B(-2\sqrt{3})=1 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} A = \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ B = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \end{array}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+1} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left\{\int \frac{dx}{x+2-\sqrt{3}} - \int \frac{dx}{x+2+\sqrt{3}}\right\}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}} \left\{ \log|x+2-\sqrt{3}| - \log|x+2+\sqrt{3}| + c \right\}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+1} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \log \left| \frac{x+2-\sqrt{3}}{x+2+\sqrt{3}} \right| + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

Esempio Calcolare $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-6x+9}$

$$\int \frac{dx}{x^2-6x+9} = \int \frac{dx}{(x-3)^2} \underset{y=x-3}{=} \left(\int \frac{1}{y^2} \frac{dy}{dx}\, dx \right)_{y=x-3}$$

$$\frac{dy}{dx} = 1$$

$$= \left(\int \frac{dy}{y^2} \right)_{y=x-3} = \left(-\frac{1}{y} + c \right)_{y=x-3} \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{dy}{x^2-6x+9} = -\frac{1}{x-3} + c \qquad c \in \mathbb{R}$$