Ricerca delle primitive

Titolo nota 19/11/2012

<u>Def</u>: Data una funzione $f: I \to \mathbb{R}$

una funzione $F: I \to \mathbb{R}$ si dice

"primitiva di f" se $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$

Esempi

$f(x) = x^n \longrightarrow F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ è una primitiva

$f(x) = \operatorname{sen} x \longrightarrow F(x) = -\cos x$ " " "

$f(x) = \cos x \longrightarrow F(x) = \operatorname{sen} x$ " " "

$f(x) = 1/x \longrightarrow F(x) = \log|x|$ " " "

$f(x) = e^x \longrightarrow F(x) = e^x$ " " "

<u>Oss</u> $\dfrac{d}{dx} \log|x| = \begin{cases} \dfrac{d}{dx} \log x = \dfrac{1}{x} & x > 0 \\ \dfrac{d}{dx} \log -x = \dfrac{1}{-x} \cdot (-1) = \dfrac{1}{x} & x < 0 \end{cases}$

Oss La derivata di f è unica, mentre di primitive ne esistono infinite

$F(x)$ primitiva di $f(x) \Rightarrow F(x) + c$ primitiva di $f(x)$ $\forall c \in \mathbb{R}$

Ma questo le esaurisce tutte?

Teorema

F e G primitive di f su I

allora $\exists c \in \mathbb{R}$ t.c. $F(x) = G(x) + c \quad \forall x \in I$

dim

$$[F-G]'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \forall x \in I \text{ intervallo}$$

$$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} \text{ t.c. } F(x) - G(x) = c \quad \forall x \in I$$

Def Data $f : I \to \mathbb{R}$, diciamo

"integrale indefinito di f" su I

$$\int f(x)\,dx = \{F : I \to \mathbb{R} : F \text{ primitive di } f\}$$

Esempio

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

Oss
$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)$$

$$\int\left(\frac{df(x)}{dx}\,dx\right) = f(x) + c$$

Esempio (una funzione senza primitiva)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$ non ha primitiva

dim

Supponiamo $\exists\, F(x)$ primitiva allora

$$F'(x) = 0 \quad \forall x \neq 0 \Rightarrow F(x) = \begin{cases} c_1 & x < 0 \\ c_2 & x > 0 \end{cases}$$

Ma F è derivabile $\Rightarrow F$ continua $\Rightarrow \lim_{x \to 0^-} F = \lim_{x \to 0^+} F$

$\Rightarrow F(x) = c_1 = c_2 = F(0) \Rightarrow F(x)$ è una costante su $\mathbb{R}$

$\Rightarrow F'(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow F'(0) = 0 \neq 1 = f(0)$ ↯

Una volta calcolate le primitive delle funzioni elementari, è necessario fornire le regole per calcolare primitive di funzioni più complesse

Oss: calcolare la derivata di una funzione è una operazione meccanica che, se possibile, non presenta difficoltà

viceversa il calcolo esplicito della primitiva (ovvero la sua espressione in termini di funzioni elementari) non è sempre possibile

L'esistenza di una primitiva di una funzione continua è garantita dal Teorema fondamentale del calcolo integrale

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) \Rightarrow \int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \Rightarrow$$ integrazione per parti

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) \Rightarrow$$ " per sostituzione

Teorema (Primitive somme = Somme primitive)

$f, g : I \to \mathbb{R} \Rightarrow \int (f+g)(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

Esempio Calcolare $\int \frac{dx}{x(x+1)}$

$$\int \frac{dx}{x(x+1)} = \int \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right] dx =$$

$$= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x+1} = \log|x| - \log|x+1| + c$$

$c \in \mathbb{R}$

Esempio Calcolare $\int (x + e^x) dx$

$$\int (x+e^x)dx = \int x dx + \int e^x dx = \frac{x^2}{2} + e^x + c$$

$c \in \mathbb{R}$

Formula Leibniz

$$(fg)'(x) \overset{\downarrow}{=} f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad \forall x \in I$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x)\,g(x) = (fg)'(x) - f(x)\,g'(x) \quad \forall x \in I$$

$$\Downarrow$$

$$\int f'(x)\,g(x)\,dx = \int (fg)'(x)\,dx - \int f(x)\,g'(x)\,dx$$

$$\Downarrow$$

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)\,g'(x)\,dx$$

Teorema (Integrazione per parti)

Data $f, g : I \to \mathbb{R}$, g derivabile, $F : I \to \mathbb{R}$ primitiva di f

allora

$$\int f(x)\,g(x)\,dx = F(x)\,g(x) - \int F(x)\cdot g'(x)\,dx$$

dim

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,g(x)\,dx = f(x)\,g(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[F(x)\,g(x) - \int F(x)\,g'(x)\right] = f(x)g(x) + \cancel{F(x)g'(x)} - \cancel{F(x)g'(x)}$$

$\Lightning$

Esercizio: Calcolare $\int x e^x dx$

dim

$$\int \underset{u'}{x}\,\underset{v}{e^x}\,dx = \underset{u}{\frac{x^2}{2}}\cdot\underset{v}{e^x} - \int \underset{u}{\frac{x^2}{2}}\,\underset{v'}{e^x}\,dx$$

e abbiamo peggiorato la situazione

$$\int \underset{u}{x}\,\underset{v'}{e^x}\,dx = \underset{u}{x}\,\underset{v}{e^x} - \int \underset{u'}{1}\cdot\underset{v}{e^x}\,dx = xe^x - e^x + c.$$

$c \in \mathbb{R}$

Esempio Calcolare $\int x^2 e^x dx$

$$\int \underset{u}{x^2}\,\underset{v'}{e^x}\,dx = \underset{u}{x^2}\,\underset{v}{e^x} - \int \underset{u'}{2x}\,\underset{v}{e^x}\,dx$$

$$= x^2 e^x - 2\int x e^x dx \;\; \ldots$$

$$= x^2 e^x - 2\left(xe^x - e^x\right) + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

Esempio Calcolare $\int \operatorname{sen}^2 x\, dx$

$$\int \underset{u'}{\operatorname{sen} x}\,\underset{v}{\operatorname{sen} x} = \underset{u}{(-\cos x)}\cdot\underset{v}{\operatorname{sen} x} - \int \underset{u}{(-\cos x)}\,\underset{v'}{(\cos x)}\,dx$$

$$= -\operatorname{sen} x \cos x + \int \left(1 - \operatorname{sen}^2 x\right) dx$$

$$= -\operatorname{sen} x \cos x + \int 1\cdot dx - \int \operatorname{sen}^2 x\, dx$$