

Teorema dell'Hôpital e Formule di Taylor

Titolo nota

19/11/2012

Teorema (di Cauchy)

$$f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

- continue su $[a, b]$
- derivabili su $]a, b[$
- $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a, b[$

La dimostrazione è stata fatta in presenza ricorrendosi al Teorema di Rolle.

$$\text{allora } \exists z \in]a, b[: \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

Teorema (dell'Hôpital - forma $\frac{0}{0}$)

$$f, g:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$$

- derivabili su $]a, b[$
- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$
- $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a, b[$
- $\exists \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$

$$\text{Allora } \exists \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

dim.

Essendo $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a, b[\Rightarrow g$ strettamente monotono

$$\Rightarrow g(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a, b[$$

$$\text{Se si definisce } \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in]a, b[\\ 0 & x = a \end{cases}$$

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & x \in]a, b[\\ 0 & x = a \end{cases}$$

$\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ risultano continue su $[a, c]$ $\forall c \in]a, b[$
" derivabili su $]a, c[$ "

$\tilde{g}$ risulta strettamente monotono su $]a, c[$

$$\frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)} = \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)}{\tilde{g}(x) - \tilde{g}(a)} = \frac{\tilde{f}'(z)}{\tilde{g}'(z)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

Teorema di Cauchy z compreso tra a e x

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(z)}{g'(z)} = \lim_{z \rightarrow a^+} \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

che vale per $(z \text{ compreso tra } a \text{ e } x \Rightarrow |z - a| \leq |z - x|)$ $\hookrightarrow$

Teorema (dell'Hôpital - forme $\frac{\infty}{\infty}$)

$$f, g:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$$

- derivabili su $]a, b[$

$$- \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \infty$$

$$- g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a, b[$$

$$- \exists \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$$

$$\text{Allora esiste } \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

dim

Si suppone $L \in \mathbb{R}$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 : x \in]a, a + \delta_1[\Rightarrow \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - L \right| < \varepsilon$$

f e g soddisfanno il Teorema di Cauchy in $[x, a + \delta_1]$

$$\forall x \in]a, a + \delta_1[$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{1 - \frac{f(a + \delta_1)}{f(x)}}{1 - \frac{g(a + \delta_1)}{g(x)}} = \frac{f(x) - f(a + \delta_1)}{g(x) - g(a + \delta_1)} = \frac{f'(t(x))}{g'(t(x))}$$

$x < t(x) < a + \delta_1$

dunque

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \psi(x) \cdot \frac{f'(t(x))}{g'(t(x))}$$

$$\psi(x) = \frac{1 - \frac{g(a+\delta_1)}{g(x)}}{1 - \frac{f(a+\delta_1)}{f(x)}} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} \psi(x) = 1$$

e dunque

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0, \delta_2 < \delta_1, a < x < a + \delta_2 \quad \begin{cases} |\psi(x) - 1| < \varepsilon \\ |\psi(x)| \leq 2 \end{cases}$$

e dunque

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| = \left| \psi(x) \cdot \frac{f'(t(x))}{g'(t(x))} - \psi(x) \cdot L + \psi(x) L - L \right|$$

$$\leq |\psi(x)| \cdot \left| \frac{f'(t(x))}{g'(t(x))} - L \right| + L |\psi(x) - 1|$$

$$\leq 2 \cdot \varepsilon + L \cdot \varepsilon$$

↑
quando $a < x < a + \delta_2$ (e dunque $x < t(x) < a + \delta_2$)

$$= (2 + L) \varepsilon$$

da cui segue la Terza



Or: Nell'applicare il Teorema dell'Hopital va fatta attenzione poiché devono essere soddisfatte certe ipotesi

Controesempio $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\sin x}{x - \frac{\pi}{2}} = +\infty$

Se si applica Hopital $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\sin x}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos x}{1} = 1$

che è un assurdo poiché $\frac{\sin x}{x - \frac{\pi}{2}}$ non è
una forma indeterminata per $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+$!!

Controesempio $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$

dove $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Ma se applico l'Hopital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{1} \text{ e quando}$$

ultimo limite non esiste. Ma in questo
caso non si applica il teorema dell'Hopital
in quanto $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$!!

Esempio

Studiare il limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - e^x}{\sin x^2}$

dove

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^x}{\sin x^2} \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - e^x}{2x \cos x^2}$$

e quest'ultimo limite non esiste poiché

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin x - e^x}{2x \cos x^2} \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \dots \quad \checkmark$$

Si era provato che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Esercizio: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \stackrel{(H)}{\downarrow} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2}$$

Esercizio: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^3} = \frac{1}{6}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^3} \stackrel{(H)}{\downarrow} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{3x^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

Teorema

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$ $x_0 \in \overset{\circ}{A}$; f derivabile in $A \setminus \{x_0\}$;

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = \alpha_- \quad \exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = \alpha_+$$

Allora $f'_-(x_0) = \alpha_-$ $f'_+(x_0) = \alpha_+$

Se $\alpha_- = \alpha_+$ allora $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \alpha_- = \alpha_+$

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{(H)}{\downarrow} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f'(x)}{1} = \alpha_-$$

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{(H)}{\downarrow} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(x)}{1} = \alpha_+$$

↙

Esercizio : determinare $a, b, c \in \mathbb{R}$ in modo

e che $f(x) = \begin{cases} (a-1)x + b - a & x > 0 \\ 3 & x = 0 \\ c - x - x^2 - 3b & x < 0 \end{cases}$ sia derivabile su $\mathbb{R}$

dim

certamente f è derivabile $\forall x \neq 0$

f è continua in $x=0$ se $\lim_{x \rightarrow 0^-} f = -3b = 3 = b - a = \lim_{x \rightarrow 0^+} f$

ovvero $\begin{cases} b = -1 \\ b - a = 3 \end{cases}$ ovvero $\begin{cases} b = -1 \\ a = b - 3 \end{cases}$ ovvero $\boxed{\begin{matrix} a = -4 \\ b = -1 \end{matrix}}$

$$f'(x) = \begin{cases} a-1 & x > 0 \\ c-2x & x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f' = c = a-1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f' \Rightarrow \boxed{c = -5}$$

dunque $a = -4, b = -1$ e $c = -5$ garantiscono
 la derivabilità $\forall x \in \mathbb{R}$

Polinomio di Taylor

Dato $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in $x_0 \in A$, si ha

$$f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)) = o(|x-x_0|) \text{ per } x \rightarrow x_0$$

ovvero la retta T_{f, x_0} è il polinomio di 1° grado che meglio approssima $f(x)$

Def. $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in]a, b[$. Il polinomio $P_m(x)$ si dice "polinomio di Taylor di ordine m relativo a f centrato in x_0 "

$$\text{se } f(x) - P_m(x) = o(|x-x_0|^m)$$

Teorema Il polinomio di Taylor di ordine m , se esiste, allora è unico
dimu

, Per assurdo si suppone che $m \geq 2$

$$f(x) - P_m(x) = o(|x-x_0|^m) \quad P_m = Q_m(x-x_0)^m + \dots + e_1(x-x_0) + e_0$$

$$f(x) - Q_m(x) = o(|x-x_0|^m) \quad Q_m = b_m(x-x_0)^m + \dots + b_1(x-x_0) + b_0$$

$$\text{Allora } P_m - Q_m(x) = o(|x-x_0|^m) \quad x \rightarrow x_0$$

$$\text{dove } P_m(x) - Q_m(x) = c_m(x-x_0)^m + c_{m-1}(x-x_0)^{m-1} + \dots + c_0$$

$$P_m(x_0) - Q_m(x_0) = c_0 = 0 \Rightarrow c_0 = e_0 - b_0 = 0 \Rightarrow e_0 = b_0$$

dunque

$$c_m = P_m(x) - Q_m(x) = (x-x_0) [c_m(x-x_0)^{m-1} + \dots + c_1] = o(|x-x_0|^m)$$

dunque

$$c_{m-1}(x) = c_m(x-x_0)^{m-1} + \dots + c_2(x-x_0) + c_1 = o(|x-x_0|^{m-1}) \quad x \rightarrow x_0$$

$$\text{dunque } c_{m-1}(x_0) = c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = e_1 - b_1 = 0 \Rightarrow e_1 = b_1$$

proseguendo per induzione si prova che

$$Q_i = b_i \quad i=0 \dots m$$

ovvero che $P_m^{(x)} = Q_m(x)$ ovvero il polinomio di

Taylor è unico.



Teorema (Formula di Taylor con il resto di Peano)

$$f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x_0 \in]a, b[$$

f derivabile $m-1$ volte in $]a, b[$

f derivabile m " " x_0

$$P_m(x) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

$$\text{Allora } f(x) - P_m(x) = o(|x-x_0|^m) \quad x \rightarrow x_0$$

dime

$$P_m(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m$$

$$P_m'(x) = f'(x_0) + f''(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(m)}(x_0)}{(m-1)!}(x-x_0)^{m-1}$$

$$P_m''(x) = f''(x_0) + f'''(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(m)}(x_0)}{(m-2)!}(x-x_0)^{m-2}$$

$$\dots$$
$$P_m^{(m-1)}(x) = f^{(m-1)}(x_0) + f^{(m)}(x_0)(x-x_0)$$

$$P_m^{(m)}(x) = f^{(m)}(x_0)$$

Ne segue che

$$P_m(x_0) = f(x_0) ; P_m'(x_0) = f'(x_0) ; P_m''(x_0) = f''(x_0)$$

$$\dots ; P_m^{(m-1)}(x_0) = f^{(m-1)}(x_0) ; P_m^{(m)}(x_0) = f^{(m)}(x_0)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_m(x)}{(x-x_0)^m} &\stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - P_m'(x)}{m(x-x_0)^{m-1}} \\ &\stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x) - P_m''(x)}{m(m-1)(x-x_0)^{m-2}} \\ &\dots \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(m-1)}(x) - P_m^{(m-1)}(x)}{m! (x-x_0)} \end{aligned}$$

Si riformula l'espressione di $P_m^{(m-1)}(x)$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(m-1)}(x) - f^{(m-1)}(x_0) - f^{(m)}(x_0)(x-x_0)}{m! (x-x_0)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(m-1)}(x) - f^{(m-1)}(x_0)}{m! (x-x_0)} - \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}$$

$f^{(m-1)}$ è derivabile in x_0

$$\downarrow$$

$$= 0$$



Esempio $f(x) = e^x$ calcolare T_n in $x_0 = 0$

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = e^x \quad x_0 = 0$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

Esempio $f(x) = e^x$ calcolare $T_3(x)$ in $x_0 = 1$

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = f'''(x) = e^x$$

$$P_3(x) = \sum_{k=0}^3 \frac{f^{(k)}(1)}{k!} \cdot (x-1)^k = e + e(x-1) + e \frac{(x-1)^2}{2} + e \frac{(x-1)^3}{6}$$

Esempio $f(x) = x - \frac{x^3}{3} + 2x^4 - x^6$

(i) Calcolare il polinomio $T_5(x)$ in $x_0 = 0$

(ii) Calcolare " " $T_3(x)$ in $x_0 = 1$

$$(i) T_5(x) = x - \frac{x^3}{3} + 2x^4$$

$$(ii) f(x) = x - \frac{x^3}{3} + 2x^4 - x^6 \quad f(1) = \frac{5}{3}$$

$$f'(x) = 1 - x^2 + 8x^3 - 6x^5 \quad f'(1) = 2$$

$$f''(x) = -2x + 24x^2 - 30x^4 \quad f''(1) = -8$$

$$f'''(x) = -2 + 48x - 120x^3 \quad f'''(1) = -74$$

$$T_3(x) = \frac{5}{3} + 2(x-1) - 4(x-1)^2 - \frac{37}{3}(x-1)^3$$

Dom : Con il resto di Peano non si può quantificare l'errore che si commette sostituendo $f(x)$ con il valore $T_n(x)$:
 questo perché $f(x) - T_n(x) = o(|x - x_0|^n)$, ovvero quando $x \rightarrow x_0$ la $(f(x) - T_n(x)) \rightarrow 0$, ma non so dare una stima di $|f(x) - T_n(x)|$

Esempio $\sin x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right) = o(x^4)$ per $x \rightarrow 0$

però $|\sin x| \leq 1$ mentre $\sup \left(x - \frac{x^3}{6}\right) = +\infty$!!

Teorema *Formula di Taylor con il resto di Lagrange*

$f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in]a, b[$
 f derivabile $n+1$ volte in $]a, b[$

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

$\Rightarrow \exists z$ compreso tra x_0 e x T.c.

$$f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

Dom Il Teorema precedente continua a valere poiché

$$\frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} = o(|x - x_0|^n) \quad x \rightarrow x_0$$

in p.t.t.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \cdot \frac{1}{(x - x_0)^n} = 0$$

dim

Polinomio $g(t) = f(t) - P_m(t)$ $h_k(t) = (t-x_0)^k \quad k=0, \dots, m+1$

$g(x_0) = h_{m+1}(x_0) = 0$ Teorema Cauchy: $\exists z_1$ compreso tra x_0 e x t.c.

$$\frac{g(x)}{h_{m+1}(x)} = \frac{g(x) - g(x_0)}{h_{m+1}(x) - h_{m+1}(x_0)} = \frac{g'(z_1)}{(m+1) h'_m(z_1)}$$

$g'(x_0) = h'_m(x_0) = 0$ Teorema Cauchy: $\exists z_2$ compreso tra x_0 e z_1

$$= \frac{1}{m+1} \frac{g'(z_1) - g'(x_0)}{h'_m(z_1) - h'_m(x_0)} = \frac{1}{(m+1)} \frac{g''(z_2)}{m \cdot h'_{m-1}(z_2)}$$

$g''(x_0) = h''_{m-1}(x_0)$ Teorema Cauchy: $\exists z_3$ compreso tra z_2 e x_0 t.c.

$$= \frac{1}{m(m+1)} \frac{g''(z_2) - g''(x_0)}{h''_{m-1}(z_2) - h''_{m-1}(x_0)} = \frac{1}{m(m+1)} \frac{g'''(z_3)}{(m-1) h'_{m-2}(z_3)} = \dots$$

$g^{(m)}(x_0) = h^{(m)}_1(x_0) = 0$ Teorema Cauchy: $\exists z_{m+1}$ compreso tra z_m e x_0

$$= \frac{1}{(m+1)!} \frac{g^{(m)}(z_m) - g^{(m)}(x_0)}{h^{(m)}_1(z_m) - h^{(m)}_1(x_0)} = \frac{1}{(m+1)!} \frac{g^{(m+1)}(z_{m+1})}{h^{(m+1)}_1(z_{m+1})}$$

$$= \frac{1}{(m+1)!} \frac{f^{(m+1)}(z_{m+1}) - P^{(m+1)}_m(z_{m+1})}{1} = \frac{f^{(m+1)}(z_{m+1})}{(m+1)!}$$

(la derivata $(m+1)$ -esima di un polinomio di ordine m è $= 0$)

Applicazione

Quale errore commetto approssimando

$\sin(1/2)$ con $P_3(1/2)$, dove $P_3(x)$ è il polinomio di Taylor centrato in $x_0 = 0$

$$P_3(x) = x - \frac{x^3}{6} \quad P_3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{48} = \frac{23}{48}$$

$$\begin{aligned} \left| \cos x - P_3(x) \right| &= \left| \frac{f^{(5)}(z)}{5!} z^5 \right| = \left| \frac{\cos z}{5!} \cdot z^5 \right| \\ &\leq \left| \frac{z^5}{5!} \right| \leq \frac{1}{32 \cdot 120} = \frac{1}{3840} \end{aligned}$$

$\uparrow$ $|\cos x| \leq 1$ $\uparrow$ $|z| \leq \frac{1}{2}$

Donc, remplaçant $\cos \frac{1}{2}$ par $P_3\left(\frac{1}{2}\right)$ on commettra un erreur $\leq \frac{1}{3840}$

$$\left(\text{N.B. } \left| \cos\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{23}{48} \right| = 0,0002588 < \frac{26}{10^5} \right)$$

et donc