Derivate - 3 parte - Convessità

Teorema (studio max e min locali)

$f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, f derivabile $\forall x \in I$

$x_0 \in I$ punto stazionario interno per f, $f'(x_0)=0$

1) $f''(x_0)>0$ allora x_0 punto di minimo locale interno

2) $f''(x_0)<0$ allora " " " massimo locale interno

Ora si osserva che $f''(x_0)>0$ e $f'(x_0)=0$

$\Rightarrow \dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}>0$ in un opportuno $]x_0-\delta, x_0+\delta[$ privato di x_0

Teorema permanenza segno

$\Rightarrow$ $f'(x)$ strettamente crescente in $]x_0-\delta, x_0+\delta[$

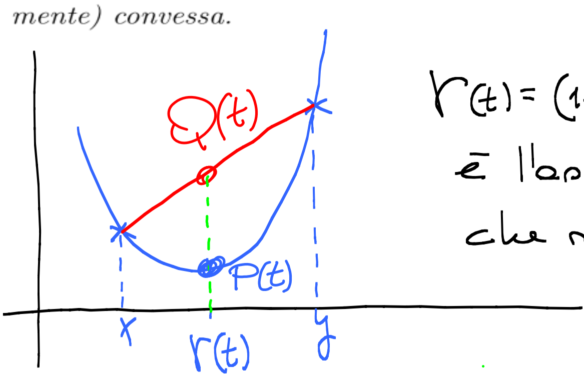
$$\Rightarrow \quad f'(x) \begin{cases} <0 & x_0-\delta<x<x_0 \\ >0 & x_0<x<x_0+\delta \end{cases}$$

e quindi ci si riconduce al teorema precedentemente dimostrato

Definizione 13.5.1 *Sia data $f : I \to \mathbb{R}$, dove I è un intervallo. Si dice che f è* **convessa su** I *se fissati comunque $x, y \in I$ con $x < y$, si ha*

$$f((1-t)x + ty) \le (1-t)f(x) + tf(y) \ \forall t \in]0,1[. \tag{13.35}$$

f è **strettamente convessa su** I *quando la disuguaglianza in 13.35 è stretta.*
Si dice che la funzione f è **(strettamente) concava** *se $-f$ è (strettamente) convessa.*



$r(t) = (1-t)x + ty \quad t \in]0,1[$

è l'ascissa del punto $P(t)$

che si muove sul segmento

$(x, f(x)) - (y, f(y))$

$Q(t) = \big((1-t)x + ty,\ (1-t)f(x) + tf(y)\big)$

$P(t) = \big((1-t)x + ty,\ f((1-t)x + ty)\big)$

$t \in [0,1]$

e quindi f convessa se

$Q(t)$ sta "sopra" $P(t)$

dove $Q(t)$ e $P(t)$ sono punti con la stessa

ascissa $\qquad (1-t)x + ty$

mentre le ordinate sono

Ordinata pto grafico $f = f((1-t)x+ty) \le \underbrace{(1-t)f(x) + tf(y)}$ ordinata p.to segmento

<u>Esempio</u> $f(x)=|x|$ è convessa su $\mathbb{R}$

Infatti

$$\left|(1-t)x+ty\right| \leq (1-t)|x|+t|y| \qquad \forall t\in\,]0,1[\quad \forall x,y\in\mathbb{R}$$

da cui la convessità

Esempio $f(x)=x^2$ è convessa su $\mathbb{R}$

$$\text{Tesi}\quad \left[(1-t)x+ty\right]^2=\left[(1-t)^2x^2+t^2y^2+2(1-t)\cdot t\cdot xy\right]\leq(1-t)x^2+ty^2$$
$$\forall t\in\,]0,1[\quad \forall x,y$$

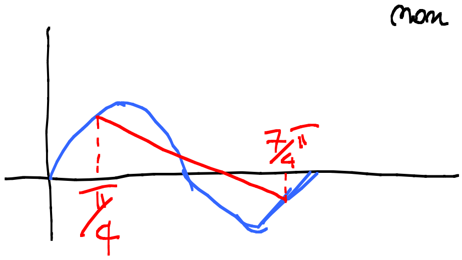
$$\text{Tesi}\quad (1-t)\left(1-(1-t)\right)x^2+t(1-t)y^2\geq 2(1-t)\cdot t\,xy \qquad \forall t\in\,]0,1[\quad \forall x,y$$

$$\text{Tesi}\quad \cancel{t(1-t)}\,x^2+\cancel{t(1-t)}\,y^2\geq 2\,\cancel{t(1-t)}\,xy \qquad \forall t\in\,]0,1[\quad \forall x,y$$

e $x^2+y^2\geq 2xy$ è vera $\forall x,y$

Esempio $f(x)=\operatorname{sen} x$ non è convessa su $[0,2\pi]$

non è concava



$x=\frac{\pi}{4} \quad y=\frac{7}{4}\pi$

$$\frac{\pi}{2}=(1-t)\frac{\pi}{4}+t\frac{7}{4}\pi$$

$$1=\frac{1}{2}-\frac{t}{2}+\frac{7}{2}t \Rightarrow 3t=\frac{1}{2} \Rightarrow t=\frac{1}{6}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1>\frac{5}{6}f\left(\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{6}f\left(\frac{7}{4}\pi\right)=\frac{5}{6}\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{6}\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\frac{3}{2}\pi=(1-t)\frac{\pi}{4}+t\cdot\frac{7}{4}\pi \qquad 3t=3-\frac{1}{2}, \quad 3t=\frac{5}{2} \quad t=\frac{5}{6}$$

$$f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=-1<\frac{1}{6}f\left(\frac{\pi}{4}\right)+\frac{5}{6}f\left(\frac{7}{4}\pi\right)=\frac{\sqrt{2}}{12}-\frac{5\sqrt{2}}{12}=-\frac{4\sqrt{2}}{12}=-\frac{\sqrt{2}}{3}$$

e dunque non è convessa né concava

Osservazione: la condizione di convessità

$$f((1-t)x+ty)\le(1-t)f(x)+tf(y) \qquad t\in]0,1[\quad x,y\in I$$

si può anche scrivere, quando $t\in[x,y]$

$$f(t)\le\frac{y-t}{y-x}f(x)+\frac{t-x}{y-x}f(y)=f(x)+\frac{f(y)-f(x)}{y-x}(t-x)$$

Infatti $f(t)=f\left(\frac{y-t}{y-x}x+\frac{t-x}{y-x}y\right)\le\frac{y-t}{y-x}f(x)+\frac{t-x}{y-x}f(y)$

$$=\frac{(y-t)f(x)+(t-x)f(y)}{y-x}$$

Si sfrutta il fatto che

$$=f(x)+\frac{(x-t)f(x)+(t-x)f(y)}{y-x}$$

$$\frac{y-t}{y-x}+\frac{t-x}{y-x}=1 \quad \forall t\in]x,y[$$

$$=f(x)+\frac{f(y)-f(x)}{y-x}(t-x)$$

$$\frac{y-t}{y-x}x+\frac{t-x}{y-x}y=t \quad \forall t\in]x,y[$$

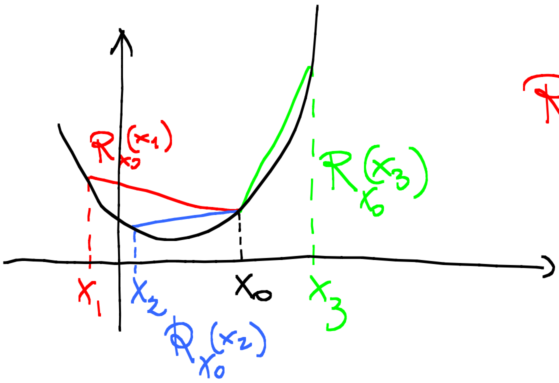
Teorema 13.5.6 *Sia data $f : I \to \mathbb{R}$.* Intervallo *Sono equivalenti tra loro le seguenti affermazioni*

(i) f è (strettamente) convessa su I.

(ii) Per ogni $x_0 \in I$ il rapporto incrementale

$$R_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

è (strettamente) crescente su $I \setminus \{x_0\}$



$$R_{x_0}(x_1) < R_{x_0}(x_2) < R_{x_0}(x_3)$$

$(\Rightarrow)$

$$\frac{R(y)-R(x)}{y-x} = \frac{f(y)-f(x_0)}{(y-x_0)(y-x)} - \frac{f(x)-f(x_0)}{(y-x)(x-x_0)}$$

$$= \frac{\left(f(y)-f(x_0)\right)(x-x_0) - \left(f(x)-f(x_0)\right)(y-x_0)}{(y-x)(y-x_0)(x-x_0)}$$

$$= \frac{f(x_0)\left[\cancel{x_0}-x+y-\cancel{x_0}\right] + f(y)(x-x_0) + f(x)(x_0-y)}{(y-x)(y-x_0)(x-x_0)}$$

Supponiamo $x < x_0 < y$ (è simmetrica rispetto a x, x_0 e y)

$$\frac{R_{x_0}(y)-R_{x_0}(x)}{y-x} = \frac{f(x_0) + f(y)\frac{x-x_0}{y-x} + f(x)\frac{x_0-y}{y-x}}{(y-x_0)(x-x_0)}$$

$$= \frac{f(x_0) - f(y)\frac{x_0-x}{y-x} - f(x)\frac{y-x_0}{y-x}}{(y-x_0)(x-x_0)} \geq 0$$

$(\Leftarrow)$ Se $R_{x_0}(x)$ è crescente allora f convessa segue ripercorrendo a rovescio la dim precedente

Oss f convessa $\Rightarrow R_{x_0} = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ è $\nearrow \Rightarrow \exists \lim\limits_{x \to x_0^+} R_{x_0}$

$\exists \lim\limits_{x \to x_0^-} R_{x_0}$

<u>Teorema</u> $f : I \to \mathbb{R}$ convessa I intervallo

allora f continua su $I \setminus \mathring{I}(I)$

dim

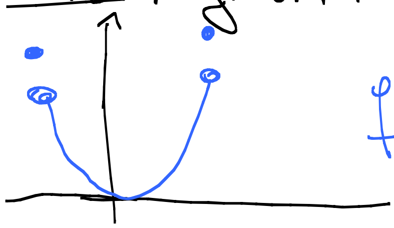
$$\lim_{x \to x_0^-} \left(f(x) - f(x_0)\right) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot (x-x_0) =$$

$$= f'_-(x_0) \cdot \lim_{x \to x_0^-} (x-x_0) = 0$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x)-f(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} (x-x_0) =$$

$$= f'_+(x_0) \cdot \lim_{x \to x_0^+} (x-x_0) = 0$$

<u>Oss</u> Negli estremi non è detto sia continua



$$f(x) = \begin{cases} 4 & x = -1 \\ x^2 & -1 < x < 1 \\ 3 & x = 1 \end{cases}$$

Teorema $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile sull'intervallo I

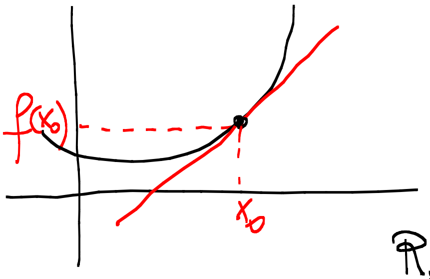
Sono tra loro equivalenti

1) f convessa su I

2) $\forall x_1, x_0 \in I \quad f(x_1) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$

dim

Proviamo 1) $\Rightarrow$ 2)



Essendo f derivabile in x_0 e convessa

Preso $x_1 > x_0$

$$R_{x_0}(x_1) \geq \lim_{x \to x_0^+} R_{x_0}(x) = f'(x_0)$$

$$\Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \geq f'(x_0) \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

Analogamente, preso $x_1 < x_0$ si ha

$$R_{x_0}(x_1) \leq f'(x_0)$$

$$\Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq f'(x_0) \Rightarrow f(x_1) - f(x_0) \geq f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

$$\Rightarrow f(x_1) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Viceversa 2) $\Rightarrow$ 1)

Presi $x < x_0 < y$

$$f(y) \geq f(x_0) + f'(x_0)(y - x_0)$$

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq f'(x_0) \quad \forall x < x_0$$

$$\frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} \geq f'(x_0) \geq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad x < x_0 < y$$

Negli altri casi ($x < y < x_0$ e $x_0 < x < y$) si procede in modo analogo

Teorema $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile $\forall x \in I$ intervallo

Sono tra loro equivalenti

i) f (strettamente) convessa su I

ii) f' è (strettamente) debolmente crescente su I

dim

Questo Teorema segue dal teorema

f convessa se $R_{x_0}(x)$ crescente

Infatti f convessa $\Rightarrow R_{x_0}(x)$ crescente $\forall x_0$

$\Rightarrow R_{x_0}(x) \leq R_{x_0}(y)$ se $x < x_0 < y$

$\Rightarrow R_x(x_0) \leq R_y(x_0)$

$\Rightarrow f'(x) = \lim_{x_0 \to x} R_x(x_0) \leq R_x(x_0) \leq R_y(x_0) \leq \lim_{x_0 \to y} R_y(x_0) = f'(y)$

$\Rightarrow f'(x) \leq f'(y)$

viceversa

$x \leq y \Rightarrow f'(x) \leq f'(y)$

$x < x_0 < y$

Teorema Lagrange $z \in]x, x_0[$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(z)$$

$\wedge\!\!\!\!\setminus$ ← Per ipotesi $f'(x) \nearrow_=$

$$\frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} = f(z_1)$$

Thm Lagrange $z_1 \in]x_0, y[$

$\Rightarrow R_{x_0}(x)$ è $\nearrow_=$ $\Rightarrow f$ è convessa

Teorema $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile 2 volte $\forall x \in I$, I intervallo

Sono tra loro equivalenti

i) f (strettamente) convessa su I

ii) $f''(x) \geq 0 \; \forall x \in I$ $\left(f''(x) > 0 \right)$

dim

$f'' \geq 0$ <u>sse</u> $f'(x)$ debolmente crescente <u>sse</u> f convessa

Def $f: I \to \mathbb{R}$ dove I intervallo $x_0 \in I$ si dice "punto di flesso" se nel punto x_0 $f(x)$ passa da convessa a concava o viceversa

Esempio $f(x) = x^3$ ha un punto di flesso in $x_0 = 0$

Esempio $f(x) = \operatorname{sen} x$ ha infiniti flessi

- in $x_m = 2m\pi$ trovo ∞ flessi con tangente avente coefficiente angolare $= 1 > 0$

- in $y_m = \pi + 2m\pi$ trovo ∞ flessi con tangente avente coefficiente angolare $= -1 < 0$

Oss Ci sono funzioni simultaneamente convesse e concave: i polinomi di 1° grado

$$f(x) = a + b(x - x_0) \quad \forall a, b, x_0 \in \mathbb{R}$$

Oss $f: I \to \mathbb{R}$ convessa e crescente

allora $f^{-1}: f(I) \to I$ convessa e crescente

Esercizio: Data $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due volte derivabile

strettamente crescente e convessa strettamente

provare che f^{-1} è strettamente crescente e concava

dim

$$f' \neq 0 \ \forall x \Rightarrow (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$$\Rightarrow (f^{-1})''(x) = - \frac{f''(f^{-1}(x))}{f'(f^{-1}(x))} \cdot \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$$= - \frac{f''(f^{-1}(x))}{\left[f'(f^{-1}(x))\right]^2} < 0$$