Derivate - parte 2

Titolo nota 19/11/2012

Data $f: A \to \mathbb{R}$ e $f': B \to \mathbb{R}$, in generale

$$B \subseteq A$$

- $f(x) = e^x$ in tal caso $f = f' : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$
- $f(x) = \sqrt{x}$ " " " $f' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $f: [0,+\infty[\to [0,+\infty[$

mentre $f':]0,+\infty[\to]0,+\infty[$

Oss Sia data $g: A \to \mathbb{R}$, $g': B \to \mathbb{R}$, $x_0 \in B$

Se g' è continua in x_0 allora esiste $g'(x_0) = \lim_{x \to x_0} g'(x)$

Pb: Se esiste $g'(x_0)$ allora esiste $\lim_{x \to x_0} g'(x)$?

NO: l'esistenza di $g'(x_0)$ non implica che g' sia continua in x_0

Controesempio $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Esiste $f'(0)$ ma f' non è continua in $x_0 = 0$

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$$

$$f'(x) = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} + x^2 \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

e $\nexists \lim_{x \to 0} f'(x)$ poiché $\nexists \lim_{x \to 0} \cos \frac{1}{x}$

Infatti presa $x_n : \frac{1}{x_n} = 2n\pi$

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = 0$$

si ha

$$\lim_{n \to +\infty} \cos \frac{1}{x_n} = 1 .$$

mentre presa $y_n : \frac{1}{y_n} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$

$$\lim_{n \to +\infty} y_n = 0$$

si ha

$$\lim_{n \to +\infty} \cos \frac{1}{y_n} = 0$$

ovvero ho trovato $\{y_n\}, \{x_n\} \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$x_n \longrightarrow 0 \quad e \quad y_n \longrightarrow 0$$

$$\cos \frac{1}{x_n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$$

$$\neq$$

$$\cos \frac{1}{y_n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

e dunque $\nexists \lim_{x \to 0} \cos \frac{1}{x}$

Si veda il Teorema sul limite di funzioni via limite di successioni

Retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$

$\neq$

" " " " " f^{-1} " $(f(x_0), x_0)$

$f : [a,b] \to f([a,b])$ derivabile e strettamente crescente

$\Rightarrow \exists\, f^{-1} : f([a,b]) \to [a,b]$ " " " "

la retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$ ha equazione

$$\underbrace{y = f(x_0) + m \cdot (x - x_0)}_{= r(x)} \qquad \text{ove } m = f'(x_0)$$

la retta tg al grafico di f^{-1} in $(f(x_0), x_0)$ ha equazione

$$\underbrace{y = x_0 + \frac{1}{m}(x - f(x_0))}_{= R(x)} \qquad m = f'(x_0)$$

si ha $R(f(x_0)) = x_0$ mentre $r(x_0) = f(x_0)$

inoltre $\begin{cases} y = f(x_0) + m(x - x_0) \\ y = x_0 + \frac{1}{m}(x - f(x_0)) \end{cases}$

$$f(x_0) + m(x - x_0) = x_0 + \frac{1}{m}(x - f(x_0))$$

$$m f(x_0) + m^2 (x - x_0) = m x_0 + x - f(x_0)$$

$$x(m^2 - 1) = m^2 x_0 - m f(x_0) + m x_0 - f(x_0)$$

$$= m x_0 (m+1) - f(x_0)(m+1)$$

$$= (m+1)(m x_0 - f(x_0))$$

e, quando $m = 1, -1$

$m = 1$ $\nexists$ soluz. poiché le Tg sono // a $y = x$

$m = -1$ $\exists\, \infty$ soluz. " " " " coincidenti e // a $y = -x$

$$x = \frac{m}{m-1}x_0 - \frac{f(x_0)}{m-1}$$

ovvero

$$y = f(x_0) + m\left(\frac{m}{m-1}x_0 - \frac{f(x_0)}{m-1} - x_0\right)$$

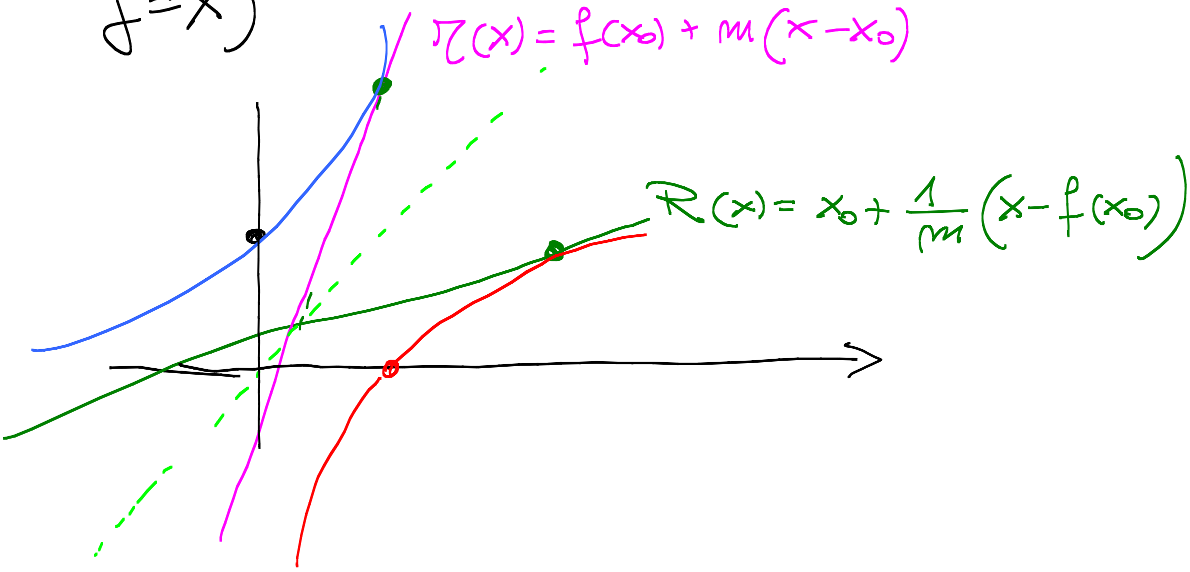
$$= f(x_0) + \frac{m}{m-1}x_0 - \frac{m}{m-1}f(x_0)$$

$$= \frac{m}{m-1}x_0 - \frac{f(x_0)}{m-1}$$

ovvero il punto di intersezione delle due rette tangenti sta sulla bisettrice

$y = x$

E le due rette sono speculari (rispetto a $y = x$)



Derivata seconda di f = Derivata della derivata prima

$$f(x) = x^3 \longrightarrow f'(x) = 3x^2 \longrightarrow f''(x) = 6x \longrightarrow f'''(x) = 6$$
$$\longrightarrow f^{(IV)} = 0$$

Esercizio $f(x) = x^2 \longrightarrow (f^{-1})'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ $\quad f^{-1}(y) = \sqrt{y}$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{2(f^{-1}(y))} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

Legame tra derivata e monotonia

<u>Oss</u>

f strettamente crescente <u>se</u> $\forall x,y \in A \ (x<y \Rightarrow f(x)<f(y))$
$f: A \to \mathbb{R}$

<u>se</u> $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} > 0 \quad \forall x \neq y$, $x,y \in A$

f debolmente crescente <u>se</u> $\forall x,y \in A \ (x<y \Rightarrow f(x) \leq f(y))$
$f: A \to \mathbb{R}$

<u>se</u> $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq 0 \quad \forall x \neq y$, $x,y \in A$

e analogamente

$f: A \to \mathbb{R}$ strettamente decrescente <u>se</u> $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} < 0 \quad \forall x,y \in A$, $x \neq y$

" debolmente " se $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq 0 \quad \forall x,y \in A$, $x \neq y$

Teorema 13.4.1 *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile nel punto $x_0 \in I$.*

(i) Se $f'(x_0) > 0$, allora esiste $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ tale che

$$\begin{cases} f(x) < f(x_0) & \text{per ogni } \; x \in I \cap]x_0 - \delta, x_0[\\ f(x_0) < f(x) & \text{per ogni } \; x \in I \cap]x_0, x_0 + \delta[. \end{cases}$$

(ii) Se $f'(x_0) < 0$, allora esiste $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ tale che

$$\begin{cases} f(x) > f(x_0) & \text{per ogni } \; x \in I \cap]x_0 - \delta, x_0[\\ f(x_0) > f(x) & \text{per ogni } \; x \in I \cap]x_0, x_0 + \delta[. \end{cases}$$

i) Segue dal Teorema della permanenza del segno

$f'(x_0) > 0$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in I \;\; 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f'(x_0) - \varepsilon < \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < f'(x_0) + \varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{f'(x_0)}{2} \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in I \;\; 0 < |x - x_0| < \delta \quad 0 < \frac{f'(x_0)}{2} < \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ovvero $f(x)$ risulta strettamente crescente in $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap I$

ii) analogo al precedente punto i)

Vale una sorta di viceversa

Teorema 13.4.2 *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile nel punto $x_0 \in I$.*

(i) Se f monotona strettamente *crescente, allora $f'(x_0) \geq 0$*

(ii) Se f monotona strettamente *decrescente, allora $f'(x_0) \leq 0$*

i) Essendo f monotona crescente, si ha

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \quad \forall x \in I \setminus \{x_0\} \\ \text{Inoltre per ipotesi esiste } \displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

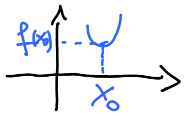
$$\Rightarrow f'(x_0) \geq 0$$

ii) analogo al punto i)

Definizione 13.4.3 (Minimo e massimo locale) *Data $f: I \to \mathbb{R}$,*

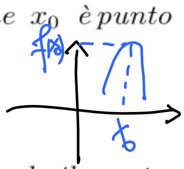
(i) un punto $x_0 \in I$ si dice punto di minimo locale per *f se esiste un intorno $U_{x_0} =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset I$ tale che x_0 è punto di minimo per $f|_{U_{x_0}}$ ovvero se*

$$\text{per ogni } \; x \in U_{x_0}, f(x_0) \leq f(x).$$

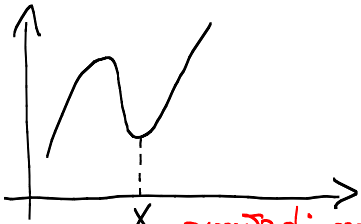


(ii) un punto $x_0 \in I$ si dice punto di massimo locale per *f se esiste un intorno $U_{x_0} =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset I$ tale che x_0 è punto di massimo per $f|_{U_{x_0}}$ ovvero se*

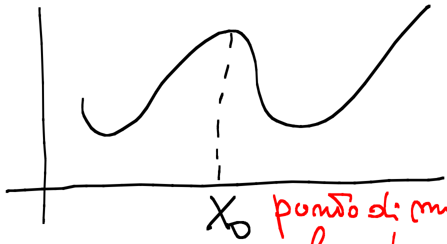
$$\text{per ogni } \; x \in U_{x_0}, \; f(x) \leq f(x_0).$$



Entrambe le definizioni diventano strette (ovvero il $>$ prende il posto del $\geq$) quando $[f(x) = f(x_0) \iff x_0]$.



punto di minimo locale



punto di massimo locale

Lemma 13.4.4 (Lemma di Fermat) *Sia data $f : I \to \mathbb{R}$, continua e derivabile su I. Se $x_0 \in I$ è un punto di massimo (minimo) locale interno, allora $f'(x_0) = 0$.*

dim: Ovvero in un min (max) locale interno, se esiste la retta Tg questa è orizzontale

Supponiamo $x_0 \in I$ massimo locale interno

allora $\exists \;]x_0-\delta, x_0+\delta[\; \subset I$ e per definizione

di massimo locale $\quad f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$

e allora

$$\begin{cases} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 & x_0-\delta < x < x_0 \\[2ex] \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0 & x_0 < x < x_0+\delta \end{cases}$$

da cui segue

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_-(x_0) \geq 0 \\ \lim\limits_{x\to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_+(x_0) \leq 0 \\ \text{ma } \exists\, f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)\end{array}\right\} \Rightarrow f'(x_0)=0$$

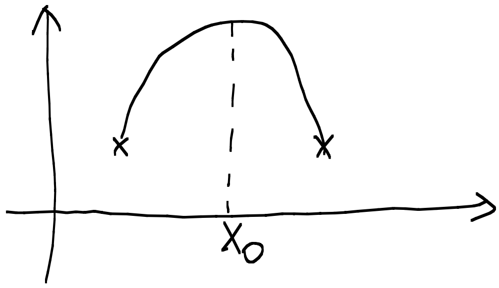
Teorema 13.4.5 (Teorema di Rolle) *Sia data $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ che soddisfa alle seguenti ipotesi:*

(i) f continua per ogni $x \in [a,b]$;

(ii) f derivabile per ogni $x \in]a,b[$;

(iii) $f(a) = f(b)$.

Allora esiste $z \in]a,b[$ tale che $f'(z) = 0$.



Per il Teorema di Weierstrass esistono $x_m, x_M \in [a,b]$ t.c.

$$f(x_m) = \min f([a,b])$$

$$f(x_M) = \max f([a,b])$$

i) $x_m, x_M \in \{a,b\} \Rightarrow \min f([a,b]) = \max f([a,b])$

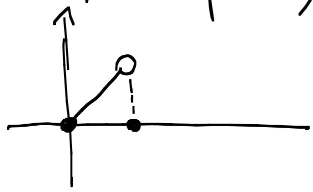
$\Rightarrow f(x)$ è costante $\Rightarrow f'(x) = 0 \ \forall x \in]a,b[$

ii) $x_M \in]a,b[$ e dunque x_M p.to max locale interno

f è derivabile in x_M

$\Rightarrow$ per il Lemma di Fermat $f'(x_M)=0$

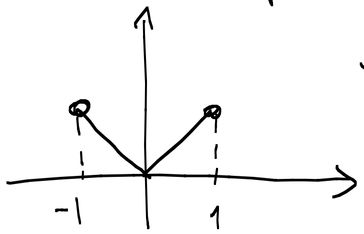
Controesempio 1) (non valga la i))



$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x < 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$

soddisfa ii), soddisfa iii) e non soddisfa la Tesi poiché $f'(x) = 1 \neq 0 \ \forall x \in]0,1[$

Controesempio 2) non valga ii)

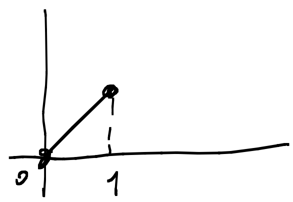


$f(x) = |x| \qquad x \in [-1,1]$

soddisfa i), soddisfa iii) ma non soddisfa la Tesi in quanto $\nexists\, z \in]-1,1[\ : \ f'(z) = 0$

Controesempio 3) non vale la iii)

$f(x) = x \qquad x \in [0,1]$



soddisfa i), soddisfa ii)

ma non soddisfa la Tesi in quanto $f'(x) = 1 \neq 0$
$\forall x \in]0,1[$

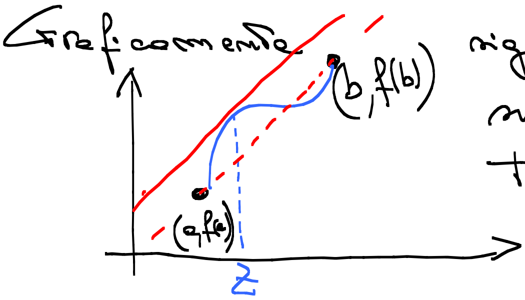
Teorema 13.4.8 `Teorema di Lagrange` *Sia data $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ che soddisfa alle seguenti ipotesi:*

(i) f continua per ogni $x \in [a,b]$;

(ii) f derivabile per ogni $x \in]a,b[$.

Allora esiste $z \in]a,b[$ tale che $f'(z) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Graficamente



significa che esiste un punto sul grafico in cui la retta tangente è // alla retta secante per $(a, f(a))$ $(b, f(b))$.

$$r(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

Introduco la funzione ausiliaria

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

- g è continua su $[a,b]$
- " " derivabile " $]a,b[$
- $g(a) = f(a) = g(b) = f(b) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) = f(a)$

$$\Rightarrow \exists z \in]a,b[: g'(z) = f'(z) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

ovvero $\exists z \in]a,b[: f'(z) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Teorema 13.4.9 **Teorema di Cauchy** *Siano date $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ che soddisfano alle seguenti ipotesi:*

(i) f, g continue per ogni $x \in [a,b]$;

(ii) f, g derivabili per ogni $x \in]a,b[$. $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in]a,b[$

Allora esiste $z \in]a,b[$ tale che

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

Ts $\exists z \in]a,b[\ \left(f(b)-f(a)\right) \cdot g'(z) - f'(z)\left(g(b)-g(a)\right) = 0$

Funzione ausiliaria $h(x) = g(x)\left(f(b)-f(a)\right) - f(x)\left(g(b)-g(a)\right)$

- h continua su $[a,b]$
- h derivabile su $]a,b[$

$g(a)f(b) - \cancel{g(a)f(a)}$
$-f(a)g(b) + \cancel{f(a)g(a)}$

- $h(a) = h(b) = g(a)f(b) - g(b)f(a)$

$\Rightarrow \exists z \in]a,b[\ : \ h'(z) = 0$ ovvero la tesi

Se poi $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in]a,b[\Rightarrow g(b) \neq g(a)$

$$\Rightarrow \exists z \in]a,b[\quad \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

Conseguenze del Teorema di Lagrange

Teorema 13.4.10 *Sia $f : I \to \mathbb{R}$, dove I è un intervallo, derivabile per ogni $x \in I$.*

$$\Big(f'(x) = 0 \ \forall x \in I\Big) \iff \Big(f(x) = \text{Cost.} \ \forall x \in I\Big). \tag{13.33}$$

$(\Rightarrow)$ Ts $\forall x, y \in I \quad f(x) = f(y)$ (f costante su I)

$f : [x,y] \to \mathbb{R}$ soddisfa le ipotesi del Teorema di Lagrange, e dunque

$\exists z \in]x,y[$ t.c. $f'(z) = \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$ ma $f'(z) = 0$

$\Rightarrow f(y) - f(x) = 0 \Rightarrow f(y) = f(x)$

Ricorda $(y - x) \neq 0$

$(\Leftarrow)$ Ts $f'(x) = 0 \ \forall x \in I$

Essendo $f(x) = C \ \forall x \in I$ la tesi è immediata (e non serve che I sia un intervallo) $\lightning$

<u>Oss</u> Se I non è un intervallo allora

$\forall x \in I \ f'(x) = 0 \not\Rightarrow f(x) = C \ \forall x \in I$

Un controesempio è dato da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \\ -1 & x \in [2,3] \end{cases}$$

$f'(x) = 0 \ \forall x \in [0,1] \cup [2,3]$ ma f non è costante

Teorema 13.4.12 *Sia $f : I \to \mathbb{R}$, dove I è un intervallo, derivabile per ogni $x \in I$.*

(i) Se $f'(x) > 0$ per ogni $x \in I$, allora f è monotona strettamente crescente su I.

(ii) Se $f'(x) < 0$ per ogni $x \in I$, allora f è monotona strettamente decrescente su I.

dim (analoga al caso precedente)

i) $\overline{\text{TS}}$ $x<y \Rightarrow f(x)<f(y)$

Presa $f:[x,y] \to \mathbb{R}$, questa soddisfa le ipotesi del Teorema di Lagrange, dunque

$$\exists z \in]x,y[\text{ t.c. } f'(z) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

ma $f'(z)>0$ per ipotesi

$\Rightarrow$ ne segue che $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} > 0 \quad \forall x<y \quad x,y \in I$

$\Rightarrow f$ è strettamente crescente in I

Il risultato precedente permette di ricondurre

- lo studio della monotonia di $f(x)$

allo

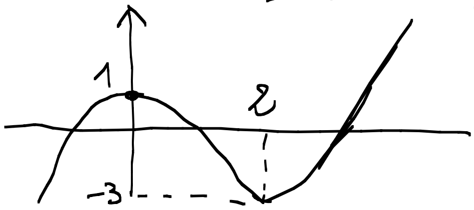
- studio del segno di $f'(x)$

<u>Esempio</u> Studiare il grafico di $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$f(0) = 1$

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0$ <u>se</u> $x=0, x=2$



$x=0$ max relativo

$x=2$ min "

Def $f: A \to \mathbb{R}$ $x_0 \in A$ p.d.a. per A

x_0 si dice "punto stazionario" per f
se f derivabile in x_0 e $f'(x_0) = 0$

Oss sono i punti con tangente orizzontale

Oss x_0 punto massimo locale interno
f derivabile in x_0 $\Rightarrow f'(x_0) = 0$

x_0 punto minimo locale interno
f derivabile in x_0 $\Rightarrow f'(x_0) = 0$

Oss $f(x) = x^3$ $\quad f'(0) = 0$ però $x_0 = 0$ non è
né min né max locale interno

Teorema (studio max e min locali)

$f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, f derivabile $\forall x \in I$

$x_0 \in I$ punto stazionario per f

1) $\exists \delta > 0 : f'(x) \begin{cases} > 0 & x_0 - \delta < x < x_0 \\ < 0 & x_0 < x < x_0 + \delta \end{cases} \Rightarrow x_0$ punto di massimo locale interno

2) $\exists \delta > 0 : f'(x) \begin{cases} < 0 & x_0 - \delta < x < x_0 \\ > 0 & x_0 < x < x_0 + \delta \end{cases} \Rightarrow x_0$ punto di minimo locale interno

3) $\exists \delta > 0 : f'(x)$ non cambia segno $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ $\Rightarrow x_0$ non è né massimo locale né minimo "

dim

1) $f'(x)\begin{cases} >0 & x_0-\delta<x<x_0 \\ <0 & x_0<x<x_0+\delta \end{cases}$

$\Rightarrow \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\begin{cases} >0 & x_0-\delta<x<x_0 \\ <0 & x_0<x<x_0+\delta \end{cases}$

$\Rightarrow f(x)-f(x_0)<0 \quad \forall x\in]x_0-\delta, x_0+\delta[\setminus \{x_0\}$

ovvero x_0 è p.to di max locale interno

2) è analogo

3) Si suppone $f'(x)>0 \ \forall x\in]x_0-\delta, x_0+\delta[$

$\Rightarrow$ per il Teorema di Lagrange $f(x)\begin{cases} <f(x_0) & x_0-\delta<x<x_0 \\ >f(x_0) & x_0<x<x_0+\delta \end{cases}$

$\Rightarrow x_0$ non è né di minimo né di max locale

$\lightning$

Teorema (studio max e min locali)

$f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, f derivabile $\forall x \in I$

$x_0 \in I$ punto stazionario interno per f, esiste $f''(x_0)$

1) $f''(x_0) > 0$ allora x_0 punto di minimo locale interno

2) $f''(x_0) < 0$ allora " " " massimo locale interno

Asintoti

Def Una retta di equazione

- $x = a$ si dice "asintoto verticale" se vale almeno una delle seguenti relazioni $\lim_{x \to a^-} f = \pm\infty$, $\lim_{x \to a^+} f = \pm\infty$

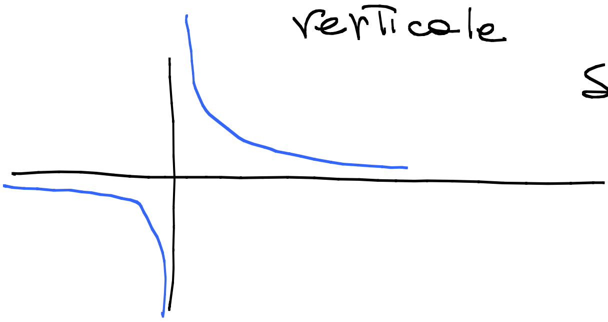
- $y = ax + b$ si dice "asintoto" per $x \to +\infty$ $(-\infty)$ se $\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - ax - b\right) = 0$ $\left(\lim_{x \to -\infty} \left(f(x) - ax - b\right) = 0\right)$

Oss: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ha un asintoto $y = ax + b$ per $x \to +\infty$ $(-\infty)$

$\Longleftrightarrow$

$\exists \lim_{\substack{x \to +\infty \\ (-\infty)}} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}$ & $\exists \lim_{\substack{x \to +\infty \\ (-\infty)}} \left(f(x) - ax\right) = b \in \mathbb{R}$

Esempio $f(x) = 1/x$ ha $x=0$ come asintoto verticale



Si ha $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

Esempio $f(x) = 1/x$ ha $y=0$ come asintoto orizzontale

Infatti $\lim_{x \to \pm\infty} 1/x = 0$

Esempio la funzione $f(x) = x + \frac{3x}{x+1}$

ha $y = x+3$ come asintoto obliquo

per $x \to \pm\infty$

Infatti $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - x \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x}{x+1} = 3$$