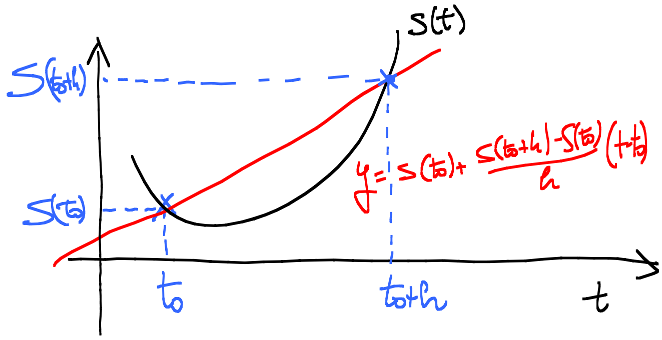
Derivabilità (prima parte)

Titolo nota 15/11/2012

Se un punto mobile su una retta ha percorso
$s(t_0)$ metri all'istante t_0
$s(t_0+h)$ " " " t_0+h



significa che nell'intervallo $[t_0, t_0+h]$ si è mosso con velocità media

$$v_m = \frac{s(t_0+h)-s(t_0)}{\cancel{t_0}+h-\cancel{t_0}}$$

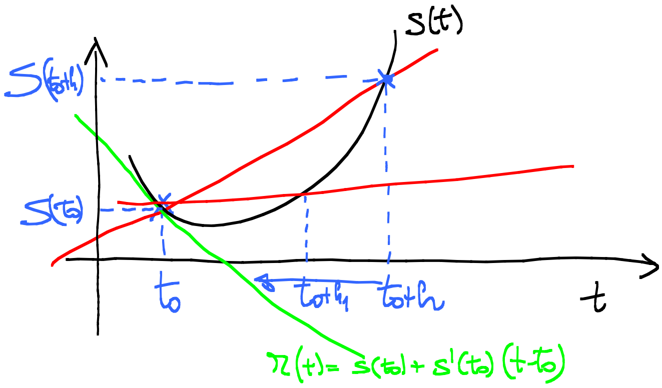
Questo numero rappresenta il coefficiente angolare della retta secante il grafico di $s(t)$ nei punti $(t_0, s(t_0))$ e $(t_0+h, s(t_0+h))$ di equazione

$$y = s(t_0) + \frac{s(t_0+h)-s(t_0)}{h} \cdot (t-t_0)$$

Quando $h \to 0$, i due punti $(t_0, s(t_0))$ e $(t_0+h, s(t_0+h))$ vengono a coincidere e la retta in posizione limite viene detta retta tangente ed ha equazione (se esiste)

$$r(t) = s(t_0) + s'(t_0) \cdot (t-t_0) \quad \text{ove}$$

$$s'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{s(t_0+h)-s(t_0)}{h}$$



Def $f: A \to \mathbb{R}$, x_0 p.d.a. per A $x_0 \in A$

Si dice "derivata di f in x_0" e si indica con

$$f'(x_0) \quad Df(x_0) \quad \frac{df}{dx}(x_0)$$

il valore (se esiste) del $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Quando $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, f si dice "derivabile in x_0"

Esempi

1) $y = \operatorname{sen} x$ è derivabile in $x_0 = 0$ e si ha $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 0}{x-0} = 1$

2) $y = \cos x$ " " " " " " , $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - \cos 0}{x-0} = 0$

3) $y = e^x$ " " " " " " " $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^0}{x-0} = 1$

4) $y = x^n$ è derivabile in $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ e si ha

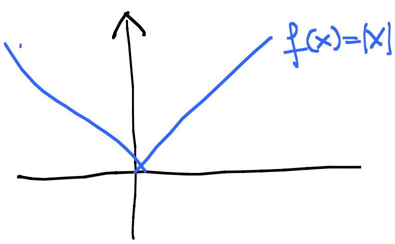
$$\lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\cancel{(x-x_0)}(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \dots + x\,x_0^{n-2} + x_0^{n-1})}{\cancel{x-x_0}}$$

$$= n\,x_0^{n-1}$$

Ricordiamo
$$(x^2-x_0^2) = (x-x_0)(x+x_0)$$
$$(x^3-x_0^3) = (x-x_0)(x^2+x\,x_0+x_0^2)$$

Tutte le funzioni sono derivabili? NO

Controesempio $f(x)=|x|$ non è derivabile in $x_0=0$



Infatti $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{|x|-|0|}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x}} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{|x|-|0|}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{-\cancel{x}}{\cancel{x}} = -1$

e dunque $\nexists \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|-|0|}{x-0}$

Def $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ p.d.a. per A

f si dice "differenziabile in x_0"

se $\exists a \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0$$

o equivalentemente

se $\exists a \in \mathbb{R}$ t.c.

$$f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) = o(|x - x_0|) \quad \text{per } x \to x_0$$

Il numero $a = df(x_0)$ è detto "differenziale di f in x_0"

Teorema: $f: A \to \mathbb{R}$ $x_0 \in A$ x_0 pda per A

f differenziabile in x_0 se f derivabile in x_0

con $df(x_0) = f'(x_0)$ con $f'(x_0) = df(x_0)$

dim

$(\Rightarrow)$ f differenziabile $\Rightarrow \exists a \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0$

$$\Rightarrow \exists a \in \mathbb{R}: \begin{cases} \displaystyle\lim_{x \to x_0^-} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{-(x - x_0)} + a\right] = 0 \\ \displaystyle\lim_{x \to x_0^+} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - a\right] = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \exists a \in \mathbb{R}: \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a = f'(x_0)$$

$(\Leftarrow)$ f derivabile $\Rightarrow$ f differenziabile

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

$$\Rightarrow f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = o(|x - x_0|) \quad x \to x_0$$

$\Rightarrow$ f differenziabile in x_0 ✓

Oss: Si è utilizzato il fatto che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{|x|} = 0$$

Teorema f differenziabile (o derivabile) in x_0 $\Rightarrow$ f continua in x_0

dim

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(|x-x_0|) \quad x \to x_0$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x_0) + \lim_{x\to x_0} f'(x_0)(x-x_0) + \lim_{x\to x_0} o(|x-x_0|)$$

limite somma = somma limiti

$$= f(x_0)$$ ovvero f è continua in x_0

Oss Derivabilità = Differenziabilità solo in $\mathbb{R}$, mentre in $\mathbb{R}^n$ $n \geq 2$ non è più vero.
Il concetto che rimane inalterato è la differenziabilità

Retta Tangente

Quando f è differenziabile in x_0, si ha $df(x_0) = f'(x_0)$ e si trova, posto $r(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

$$f(x) = r(x) + o(|x-x_0|) \quad \text{per } x \to x_0$$

ovvero

$$f(x) - r(x) = o(|x-x_0|) \quad \text{per } x \to x_0$$

La retta $r(x)$ viene detta "retta Tangente al grafico di $f(x)$" nel punto $(x_0, f(x_0))$

Esempio

$f(x) = \operatorname{sen} x$ $\quad (0, \operatorname{sen} 0) = (0,0)$

la retta Tangente è $r(x) = f(0) + f'(0)(x-0) = 0 + 1\cdot(x-0)$

$$r(x) = x$$

$f(x) = e^x \qquad (0, e^0) = (0, 1)$

la retta tangente è $\quad r(x) = f(0) + f'(0)(x-0)$

$\qquad = 1 + 1 \cdot (x-0)$

$r(x) = 1 + x$

__Oss__ la retta tangente è la retta che meglio approssima $f(x)$ quando $x \to x_0$

Oss Data l'unicità del limite

- la derivata (differenziale) se esiste è unica

- la retta tangente " " " "

Def $f: A \to \mathbb{R}$ x_0 p.d.a. per A

quando esiste, la "derivata sinistra $f'_-(x_0)$" è

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_{|]-\infty, x_0[}(x) - f(x_0)}{x-x_0} = f'_-(x_0)$$

quando esiste, la "derivata destra $f'_+(x_0)$" è

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_{|]x_0, +\infty[}(x) - f(x_0)}{x-x_0} = f'_+(x_0)$$

Teorema : $f: A \to \mathbb{R}$, x_0 p.d.a. per A

- Se $\exists\, f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ allora $\exists\, f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$
- Se $\exists\, f'(x_0)$, $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ allora $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$

<u>Teorema</u> $f, g: A \to \mathbb{R}$, x_0 p.d.a. per A, $x_0 \in A$

- $\exists\, f'(x_0)$
- $g \equiv f$ in un intorno di x_0

$\Rightarrow \exists\, g'(x_0) = f'(x_0)$

Oss la derivabilità, come la continuità, è un concetto locale (o puntuale)

mentre

Lipschitzianità
monotonia
uniforme continuità

$\Big\}$ sono concetti globali

Esercizio $f(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow f'(x) = \cos x_0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$

dim

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\operatorname{sen}(x_0 + (x - x_0)) - \operatorname{sen} x_0}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\operatorname{sen} x_0 \cos(x - x_0) + \operatorname{sen}(x - x_0) \cos x_0 - \operatorname{sen} x_0}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left[\operatorname{sen} x_0 \frac{\cos(x - x_0) - 1}{x - x_0} + \cos x_0 \frac{\operatorname{sen}(x - x_0)}{x - x_0} \right]$$

$$= \operatorname{sen} x_0 \lim_{t \to 0} \frac{\cos t - 1}{t} + \cos x_0 \lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = \cos x_0$$

Limite somma = somma limiti

Cambiamento variabile nel limite $t = x - x_0$

Esercizio $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{sen} x_0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$

dim

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} \qquad \cos x = \cos(x_0 + (x - x_0))$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\cos x_0 \cos(x - x_0) - \operatorname{sen} x_0 \operatorname{sen}(x - x_0) - \cos x_0}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left[\cos x_0 \frac{\cos(x - x_0) - 1}{x - x_0} - \operatorname{sen} x_0 \frac{\operatorname{sen}(x - x_0)}{x - x_0} \right]$$

$$= \cos x_0 \lim_{t \to 0} \frac{\cos t - 1}{t} - \operatorname{sen} x_0 \lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = -\operatorname{sen} x_0$$

Esercizio $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x_0) = e^{x_0} \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$

dim

$$\lim_{x \to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0} \lim_{x \to x_0} \frac{e^{x - x_0} - 1}{x - x_0} = e^{x_0} \cdot \lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t} = e^{x_0}$$

Cambio variabile nel limite $t = x - x_0$

Esercizio: $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x_0) = n x_0^{n-1} \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$

dim

fatta in precedenza $\lightning$

In questo modo abbiamo calcolato le derivate delle funzioni elementari:

Dobbiamo provare: Teoremi algebrici, ovvero

derivata somma

" prodotto

" " composizione

Teorema

$f, g : A \to \mathbb{R} \quad x_0 \in A$ p.d.a. per A

Se esistono $f'(x_0)$ e $g'(x_0)$

allora esiste $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ (fatta eccezione per $+\infty - \infty$)

dim

Segue dal Teorema sulla somma dei limiti

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0)$$

limite somma = somma limiti

$\lightning$

Teorema (formula di Leibniz)

$f, g : A \to \mathbb{R} \quad x_0 \in A$ p.d.a. per A

Se $\exists f'(x_0)$ e $g'(x_0)$ allora $\exists (f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) g'(x_0)$

eccettuate le forme indeterminate

dim.

$$(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0) = f(x) \cdot g(x) - f(x_0) g(x) + f(x_0) g(x) - f(x_0) g(x_0)$$

e dunque

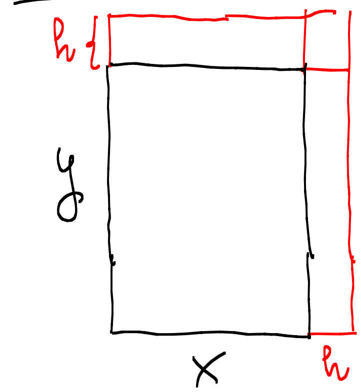
$$(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0) = g(x) \cdot \left(f(x) - f(x_0)\right) + f(x_0) \cdot \left(g(x) - g(x_0)\right)$$

e dunque, utilizzando il Teorema della somma e prodotto dei limiti escluse le forme indeterminate

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} g(x)\cdot \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + f(x_0)\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

$$= g(x_0)\cdot f'(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)$$

Ora



Quando il lato del quadrato incrementa da x a $x+h$

$$A = xy \longrightarrow \tilde{A} = (x+h)(y+h)$$

$$\tilde{A} - A = xh + yh + h^2$$

e quando $h \to 0$ si ha che

$$A - \tilde{A} = h(x+y) + o(h)$$

ovvero la parte "rilevante" nella derivata

$$\frac{A-\tilde{A}}{h} = (x+y) + \frac{o(h)}{h} \longrightarrow x+y$$

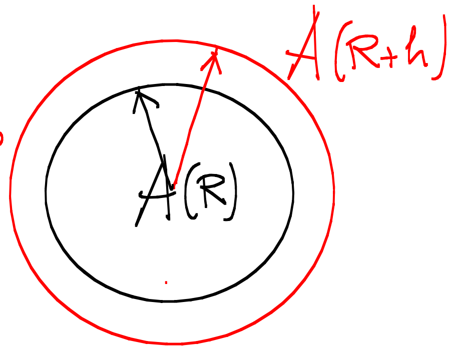
(nel caso $x=y$ trovo $2x$, che è la derivata di x^2)

Esempio

Area cerchio

$$A(R) = \pi R^2$$

$$A(R+h) = \pi (R+h)^2$$



$$\frac{A(R+h)-A(R)}{h} = \pi\,\frac{2Rh+h^2}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} 2\pi R$$

Perimetro Cerchio

Esempio

$V(R) = \frac{4}{3}\pi R^3$ Volume Sfere

$$\frac{dV(R)}{dR} = \frac{4}{3}\pi\left(3R^2\right) = 4\pi R^2 \equiv S(R)$$

Area Superficie Sferica

Adesso serve il Teorema sulla derivata del prodotto di composizione

Teorema

$f: A \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in C = f^{-1}\left(f(A) \cap B\right)$ p.d.a. per C

$g: B \to \mathbb{R}$

$y_0 = f(x_0)$

- f derivabile in x_0

- g derivabile in x_0

allora $(g \circ f)$ è derivabile in x_0 e si ha

$$(g \circ f)'(x_0) = g'\left(f(x_0)\right) \cdot f'(x_0)$$

dim.

Per ipotesi

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o\left(|x - x_0|\right) \quad x \to x_0$$

$$g(y) = g(y_0) + g'(y_0)(y - y_0) + o\left(|y - y_0|\right) \quad y \to y_0$$

quando $x \to x_0$ anche $f(x) \to f(x_0)$

$$g(f(x)) = g(f(x_0)) + g'(y_0)\left(f(x) - f(x_0)\right) + o\left(|f(x) - f(x_0)|\right)$$

ma $f(x) - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x-x_0) + o\left(|x-x_0|\right)$

$$g(f(x)) = g(f(x_0)) + g'(y_0)\left(f'(x_0)(x-x_0) + o(|x-x_0|)\right) +$$

$$+ o\left(\left|f'(x_0)(x-x_0) + o(|x-x_0|)\right|\right) \quad x \to x_0$$

$$= g(f(x_0)) + g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)(x-x_0) + o(|x-x_0|) \quad x \to x_0$$

dunque $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$

Dimostrazione alternativa

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(g\circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(g\circ f)(x) - (g\circ f)(x_0)}{f(x) - f(x_0)} \; \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

questo passaggio è illecito poiché può accadere $f(x) = f(x_0)$ per $x \neq x_0$

$$\gamma(z) = \begin{cases} \dfrac{g(z) - g(y_0)}{z - y_0} & z \neq y_0 \\[2ex] g'(y_0) & z = y_0 \end{cases}$$

In tal modo si ha, per $x \neq x_0$

$$\frac{g(f(x)) - g(y_0)}{x - x_0} = \gamma(f(x))\cdot\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \begin{cases} \dfrac{g(f(x)) - g(y_0)}{f(x) - y_0}\;\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} & f(x) \neq y_0 \\[2ex] g'(y_0)\cdot 0 & f(x) = y_0 \end{cases}$$

e dunque (essendo γ continua in $f(x_0)$, posso cambiare variabile)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(y_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \gamma(f(x)) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{y \to y_0} \gamma(y) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \gamma(y_0) \cdot f'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0)$$

Da questi tre risultati si possono provare

- derivata f.ne inversa
- " reciproco
- " rapporto

ma per semplicità proviamo questi risultati in modo indipendente

Teorema (derivata funzione inversa)

$f:]a,b[\to f(]a,b[)$ strettamente monotona

f derivabile in $x_0 \in]a,b[$ $\quad f'(x_0) \neq 0$

allora f^{-1} è derivabile in $f(x_0)$ e si ha

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

ovvero

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

dim

Essendo f strettamente monotona $\Rightarrow f^{-1}$ è strettamente monotona

Posto $g = f^{-1}$ si ha $(f \circ g)(y) = y$

$$1 = (f \circ g)'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(g(y)) - f(g(y_0))}{y - y_0}$$

si può fare poiché $g(y) \neq g(y_0)$ $\forall y \neq y_0$

$$= \lim_{y \to y_0} \frac{f(g(y)) - f(g(y_0))}{g(y) - g(y_0)} \cdot \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}$$

g è continua quindi si può fare il cambio variabili $x = g(y)$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}$$

$$= f'(x_0) \cdot \lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}$$

Da cui segue $g'(y_0) = 1/f'(x_0)$ se $f'(x_0) \neq 0$

N.B. si è utilizzato il seguente risultato (Corollario del Teorema derivata composizione)

Se esiste $(f \circ g)'(y_0)$ ed esiste $f'(x_0)$

allora esiste anche $g'(y_0)$

Altra dimostrazione: $g(y) = f^{-1}(y)$. f è differenziabile in $x_0 = g(y_0)$

$$f(g(y)) - f(x_0) = f'(x_0)\left[g(y) - x_0\right] + o\left(|g(y) - x_0|\right) \quad y \to y_0$$

$$\Downarrow$$

$$y - y_0 = f'(x_0)\left[g(y) - x_0\right] + o\left(|g(y) - x_0|\right) \quad y \to y_0$$

ma $$o\left(|y - y_0|\right) = o\left(|g(y) - x_0|\right) \quad y \to y_0$$

$$\Downarrow$$

$$y - y_0 = f'(x_0)\left[g(y) - x_0\right] + o\left(|y - y_0|\right) \quad y \to y_0$$

$$\Downarrow$$

$$y - y_0 + o\left(|y - y_0|\right) = f'(x_0)\left[g(y) - x_0\right] \quad y \to y_0$$

$$\Downarrow \; x_0 = g(y_0) \text{ e } f'(x_0) \neq 0$$

$$g(y) - g(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}\left[y - y_0\right] + o(y - y_0) \quad y \to y_0$$

ovvero $$g'(y_0) = \left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Teorema (derivata di $1/f$)

$f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ p.d.a per A

Se esiste $f'(x_0)$ e se $f(x_0) \neq 0$ allora $\exists \left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}$

dim

Dalla definizione

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1/f(x) - 1/f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \left[-\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right] \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x) f(x_0)} = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}$$

Limite di un prodotto = prodotto limiti

Esercizio

$f, g: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ p.d.a per A, f e g derivabili

con $g(x_0) \neq 0$.

Allora $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) g(x_0) - f(x_0) g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

dim

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0) \cdot \frac{1}{g(x_0)} + f(x_0) \cdot \left(-\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}\right)$$

$$= \frac{f'(x_0) g(x_0) - f(x_0) g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Esercizio Dato $f(x) = x^8$, calcolare f' in 3 modi $\neq$

- $f(x) = x^8 \Rightarrow f'(x) = 8x^7$ in modo diretto

- $f(x) = x^3 \cdot x^5 = g(x) \cdot h(x)$ $\quad g(x) = x^3$ $\quad h(x) = x^5$

$$f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) h'(x) = 3x^2 \cdot x^5 + x^3 \cdot 5x^4$$
$$= 8x^7$$

$- f(x) = (h \circ g)(x)$ $\qquad g(x) = x^4 \quad g' = 4x^3$

$\qquad h(y) = y^2 \quad h' = 2y$

$$f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) = 2(x^4) \cdot 4x^3 = 8x^7$$

Esercizio $f(x) = \operatorname{Tg} x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$

$$\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' = \frac{(\operatorname{sen} x)' \cos x - \operatorname{sen} x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{Tg}^2 x$$

Esercizio $f(x) = e^x \Longrightarrow (f^{-1})'(y) = 1/y$

$f^{-1}(y) = \log y$

$f = e^x$ è monotona

è derivabile

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{e^{f^{-1}(y)}} = \frac{1}{e^{\log y}} = \frac{1}{y}$$

Esempio $f(x) = \operatorname{tg} x \Longrightarrow (f^{-1})'(y) = \frac{1}{1+y^2}$

$f^{-1}(y) = \operatorname{arctg} y$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{1 + \operatorname{Tg}^2(f^{-1}(y))} =$$

$$= \frac{1}{1 + [\operatorname{Tg}(\operatorname{arcTg} y)]^2} = \frac{1}{1+y^2}$$

Esercizio $\quad f(x) = \text{sen}\left(\cos\left(1+x^2\right)\right)$

calcolare f'

$$f(x) = \left(l \circ h \circ g\right)(x) \qquad x \xrightarrow{g} 1+x^2 \xrightarrow{h} \cos(1+x^2) \xrightarrow{l} \text{sen}(\ )$$

$g = 1+x^2 \quad g' = 2x$

$h(y) = \cos y \quad h'(y) = -\text{sen}\, y$

$l(z) = \text{sen}\, z \quad l'(z) = \cos z$

$$f'(x) = l'\left((h \circ g)(x)\right) \cdot h'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)$$

$$= \cos\left(\cos(1+x^2)\right) \cdot \left(-\text{sen}\left(1+x^2\right)\right) \cdot 2x$$

$$= -2x \cdot \cos\left(\cos\left(1+x^2\right)\right) \cdot \text{sen}\left(1+x^2\right)$$