

UNIFORME CONTINUITÀ

Titolo nota

09/11/2012

Una funzione $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ è continua in $x_0 \in A$

$$\text{se} \\ \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in A \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Qm Nella definizione di continuità $\delta = \delta(x_0, \varepsilon)$
ovvero dipende sia da x_0 che da ε

Esempio $f(x) = \frac{1}{x}$ è continua $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Andiamo a provarlo utilizzando la sola definizione

Prendiamo $x_0 > 0$, si deve provare

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x > 0 \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| < \varepsilon$$

Prendiamo $\delta < x_0$, si ha che $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset]0, +\infty[$

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| = \left| \frac{x - x_0}{x x_0} \right| < \frac{\delta}{(x_0 - \delta) x_0} = \varepsilon$$

$$\uparrow \\ |x - x_0| < \delta \text{ e } x_0 - \delta < x$$

$$\text{dunque } \delta = x_0^2 \cdot \varepsilon - x_0 \delta \Leftrightarrow \delta(1 + x_0 \varepsilon) = x_0^2 \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \delta = \frac{x_0^2 \varepsilon}{1 + x_0 \varepsilon}$$

$$\text{Essendo } x_0 > 0, \text{ si ha che } \delta = \frac{x_0 \varepsilon}{1 + x_0 \varepsilon} \cdot x_0 < x_0$$

$$\text{Dunque si è individuato } \delta = \frac{x_0^2 \varepsilon}{1 + x_0 \varepsilon}$$

$$\text{A partire da } \varepsilon = 1, \text{ quando } x_0 = 10^3 \Rightarrow \delta = \frac{1000}{1001} \cdot 1000 \sim 10^3$$

$$x_0 = 10^{-3} \Rightarrow \delta = \sim 10^{-6}$$

Def la continuità è un concetto locale (puntuale)
a differenza della monotonia che è un concetto globale (dipende dall'insieme)

Esempio $f(x) = \sin x$ risulta essere

- crescente su $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
- decrescente su $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$
- non monotona su $[0, 2\pi]$

Def $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice L -Lipschitziana se

$$\exists L > 0 : |f(x) - f(y)| \leq L |x - y|$$

Esempio $f(x) = 5x$ è 5-Lipschitziana su $\mathbb{R}$

Teorema $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ L -Lipschitziana allora f continua
 $\forall x \in A$

dimo

fissato $x_0 \in A$ devo provare che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in A \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$\text{prendo } \delta = \frac{\varepsilon}{L} \text{ e } y = x_0$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \frac{\varepsilon}{L} : \forall x \in A \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq L \cdot |x - x_0| < L \cdot \delta = \varepsilon$$

✓

Controesempio $f(x) = \sqrt{x}$ è continua in $[0, 1]$
ma non è ivi Lipschitziana

$$\text{Teri} \quad \sup \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} : x, y \in [0, 1] \quad x \neq y \right\} = +\infty$$

$$\text{e infatti} \quad \frac{|\sqrt{x} - \sqrt{y}|}{|x - y|} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

e si ha che

$$\sup \left\{ \frac{1}{\sqrt{x_m} + \sqrt{y_m}} : m \in \mathbb{N} \right\} = +\infty$$

$$\Rightarrow \sup \left\{ \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} : x, y \in [0, 1] \quad x \neq y \right\} = +\infty \quad \nexists$$

Esercizio $f(x) = \frac{1}{x}$ non è L -lipschitziana
su $]0, 1]$

Definizione (Uniforme continuità)

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice "uniformemente continua su A "

se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x, y \in A \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Teorema (lipschitziana $\Rightarrow$ uniforme continuità)

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$ L -lipschitziana allora

f è uniformemente continua

dove

$$\text{tesi} \quad \exists L > 0 \quad \forall x, y \in A \quad |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

$$\text{Tei} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x, y \in A \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

$$\text{prendendo } \delta = \frac{\varepsilon}{L} \text{ si ha la Tei} \quad \nexists$$

Teorema (Uniforme continuità $\Rightarrow$ continuità)

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$ uniformemente continua

allora f è continua

Linee

Ipotesi: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, y \in A \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

prova $y = x_0 \in A$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in A \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

ovvero f è continua in x_0



Def Anche l'uniforme continuità è un concetto globale

Def Lipschitziana $\Rightarrow$ Unif. Continuità $\Rightarrow$ Continuità

Controesempio Continuità $\not\Rightarrow$ Unif. Continuità

$f(x) = x^2$ è continua su $[0, +\infty)$ ma non è ivi
unif continua

Tesi $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \exists x_\delta, y_\delta \geq 0 : |x_\delta - y_\delta| < \delta \text{ e } |x_\delta^2 - y_\delta^2| \geq \varepsilon$

Tesi $\exists \varepsilon > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n, y_n \geq 0 : |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \text{ e } |x_n^2 - y_n^2| \geq \varepsilon$

Prendi $x_n = n$ e $y_n = n + \frac{1}{2n}$

$$|x_n^2 - y_n^2| = \left| n^2 - \left(n + \frac{1}{2n}\right)^2 \right| = \left| 1 + \frac{1}{4n^2} \right| \geq 1 \quad \forall n$$

dunque

$\exists \varepsilon = 1 \quad \forall n \exists x_n = n, y_n = n + \frac{1}{2n} : |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \text{ e } |x_n^2 - y_n^2| \geq 1$

Teorema (Heine Cantor)

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua su $[a, b]$ chiuso e limitato

allora f è uniformemente continua su $[a, b]$ dim

contradd: $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \exists x_\delta, y_\delta \in [a, b] \quad |x_\delta - y_\delta| < \delta \text{ e } |f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \varepsilon$

$\Downarrow$

$\exists \varepsilon > 0 : \forall n > 0 \exists x_n, y_n \in [a, b] : |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \text{ e } |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$

$\{y_n\}_n \subset [a, b] \Rightarrow \exists \{y_{k_n}\}_n$ sotto successione convergente
 $\uparrow$ Bolzano Weierstrass
ovvero: $y_{k_n} \rightarrow \bar{y} \in [a, b]$

Per $y_{k_n} - \frac{1}{k_n} < x_{k_n} < y_{k_n} + \frac{1}{k_n} \quad \forall n$

$\Downarrow$ Teorema Cauchy

$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{k_n} = \bar{y}$

Esempio f continua in $\bar{y}$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f(x_{k_n}) - f(y_{k_n})| = 0$

allora

$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \quad \begin{cases} |x_{k_n} - y_{k_n}| < \varepsilon \\ |f(x_{k_n}) - f(y_{k_n})| < \varepsilon \end{cases}$

il che è ASSURDO

$\Downarrow$

Esempi

$f(x) = \frac{1}{x}$ è uniformemente continua su $[\frac{1}{10^7}, 10^7]$

$f(x) = x^2$ " " " " $[0, 10^9]$

Controesempio (Unif. continuity $\not\Rightarrow$ Lipschitzian)

$f(x) = \sqrt{x}$ è uniformemente continua su $[0,1]$

non è Lipschitziana su $[0,1]$

Infatti, $\sqrt{x}$ è continua su $[0,4]$ chiuso e limitato

$\Rightarrow$ è uniformemente continua su $[0,4]$

$\uparrow$
Heine Cantor

$\sqrt{x}$ non è Lipschitziana (provato in precedenza)