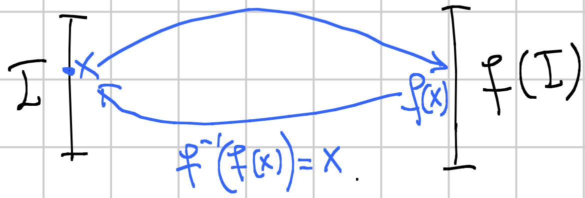
La funzione inversa

Titolo nota 08/11/2012

Def: Sia $f: I \to f(I)$ una funzione biettiva su $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo. La funzione $g: f(I) \to I$ si dice "funzione inversa di f" e si indica con $g = f^{-1}$ se verifica

$$(f \circ g)(y) = y \quad \forall y \in f(I)$$

$$(g \circ f)(x) = x \quad \forall x \in I$$

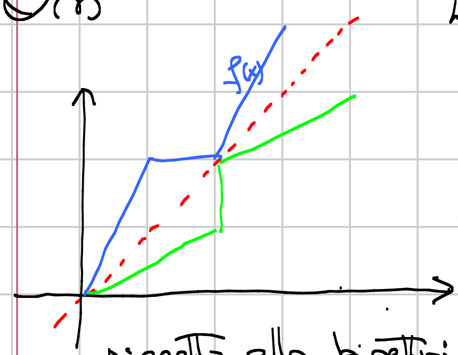


Esempio $f(x) = 2x+1$ definita su $I = [0,2]$.

Si ha $f(I) = [1,5]$, $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$ che risulta essere continua e strettamente crescente

Oss $(u,v) \in \{(x, f(x)) : x \in I\}$ sse $(v,u) \in \{(y, f^{-1}(y)) : y \in f(I)\}$ ovvero il grafico della funzione inversa si ottiene "riflettendo" il grafico di $f(x)$ rispetto alla diagonale 1° e 3° quadrante

Oss



La funzione $f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le 1 \\ 2 & 1 \le x \le 2 \\ 2x-2 & 2 \le x \le 3 \end{cases}$

è continua ma non è invertibile. Infatti, se si riflette il grafico rispetto alla bisettrice si ottiene (ricorda $f([0,3]) = [0,4]$)

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & 0 \le x < 2 \\ [1,2] & x = 2 \\ x/2 + 1 & 2 < x \le 4 \end{cases}$$

Un risultato assai semplice è

Teorema

$f: I \to f(I)$, I intervallo

Se f strettamente crescente (decrescente)
allora $\exists f^{-1}: f(I) \to I$ strettamente crescente

dim

Supponiamo f strettamente crescente: presi $x \neq y \in I$

$$\left.\begin{array}{l} x<y \Rightarrow f(x)<f(y) \\ x>y \Rightarrow f(x)>f(y) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \neq f(y) \Rightarrow f \text{ iniettiva}$$

f è suriettiva per costruzione $\Rightarrow f$ è biiettiva

$$\Rightarrow \exists f^{-1}: f(I) \to I$$

Essendo f crescente strettamente si ha che

$x<y \Rightarrow f(x)<f(y)$

ma

$f(x)<f(y) \Rightarrow x<y$

ma

$f(x)<f(y) \Rightarrow f^{-1}(f(x)) < f^{-1}(f(y))$

ma

$z<\omega \Rightarrow f^{-1}(z) < f^{-1}(\omega)$

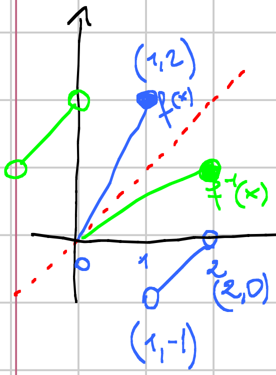
ovvero

f^{-1} strettamente crescente

Non vale il viceversa, ovvero

$f: I \to f(I)$, I intervallo, f invertibile $\not\Rightarrow$ f strettamente monotona

Esempio



$$f(x)=\begin{cases} 2x & 0\le x\le 1 \\ x-2 & 1<x<2 \end{cases}$$

$f:[0,2[\longrightarrow]-1,2]$

invertibile con inversa

$$f^{-1}(y)=\begin{cases} x+2 & -1<x<0 \\ x/2 & 0\le x\le 2 \end{cases}$$

Ma la funzione f^{-1} non risulta essere monotona

Teorema

$f:I\to f(I)$ continua, allora sono equivalenti

i) f invertibile

ii) f strettamente monotona

dim

ii) $\Rightarrow$ i) questa implicazione vale pure se f non è continua

i) $\Rightarrow$ ii) Si vuole provare 1.) f continua : $I\to f(I)$

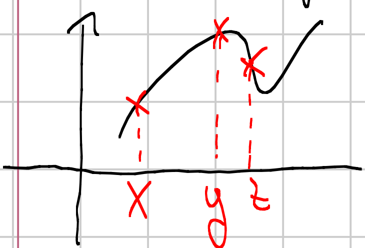
2.) I intervallo $\Rightarrow$ f strettamente monotona

3.) f invertibile

Per assurdo f non sia monotona strettamente, ovvero

$\exists x,y,z\in I$ $x<y<z$ t.c. $f(x)<f(z)<f(y)$

(vedi figura)



$f:[x,y]\to f(I)$ è continua

$\Rightarrow$ $\forall k\in\mathbb{R}$ $f(x)<k<f(y)$ $\exists w\in[x,y]$ t.c. $f(w)=k$

Corollario Teorema valori intermedi $\Rightarrow \exists w\in[x,y]$: $f(w)=f(z)$

Assurdo (f è invertibile e quindi iniettiva)

Presi $a, b \in I$ $a<b$

Se $f(a) < f(b)$ allora f è strettamente crescente

Presi $x_1 < x_2 \in I$, sia $b_1 = \max\{b, x_2\}$

Se $f(a) < f(b)$ allora $f(a) < f(x)$ $\forall x > a$ (Teorema Valori Inter.)

allora $f(a) < f(b_1)$

allora $f(x) < f(b_1)$ $\forall x < b_1$ (Teorema Valori Int.)

allora $f(x_1) < f(b_1)$

allora $f(x_1) < f(x)$ $\forall x > x_1$ (Teorema Valori interm.)

allora $f(x_1) < f(x_2)$

In modo analogo $f(a) > f(b)$ implica

che f è strettamente decrescente ↯

Obbiettivo: f invertibile, f continua, $f: I \to f(I)$

allora f^{-1} esiste continua

<u>Teorema</u>

$f: I \to f(I)$ strettamente crescente (decrescente), I intervallo

allora sono equivalenti:

(i) f continua

(ii) $f(I)$ è un intervallo

<u>dim</u>

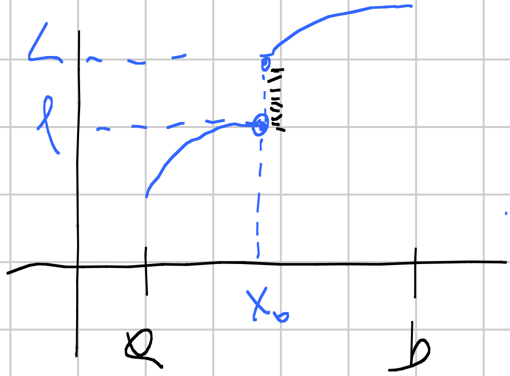
(i) $\Rightarrow$ (ii) vero: Teorema dei valori intermedi
(non serve la monotonia!)

$$\text{(ii)} \Rightarrow \text{(i)} \quad \left.\begin{array}{l} f: I \to f(I),\ I \text{ intervallo} \\ f \text{ strettamente crescente} \\ \qquad\qquad (\text{decrescente}) \\ \\ f(I) \text{ intervallo} \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ continua su } I$$

<u>x assurdo</u> $I = [a,b] \to f: [a,b] \to \overbrace{f([a,b])}^{\text{intervallo}}$ f crescente

esiste $x_0 \in]a,b[$ t.c. f discontinua in x_0

dunque $\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l < L = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$



Essendo f strett. crescente

$\forall x \in [a, x_0[\quad f(x) < l$

$\forall x \in]x_0, b] \quad f(x) > L$

$$]l, L[\cap f(I) = \begin{cases} \emptyset \\ f(x_0) \end{cases}$$

$f(x_0)$ può $\begin{cases} \text{coincidere con } l \\ \in]l, L[\\ \text{coincidere con } L \end{cases}$

poiché $f(I)$ è un intervallo

in tutti i casi, preso $x_1 \in [a, x_0[$, $x_2 \in]x_0, b]$ $\Rightarrow [f(x_1), f(x_2)] \subseteq f(I)$

ma $]l, L[\not\subseteq [f(x_1), f(x_2)]$ e questo

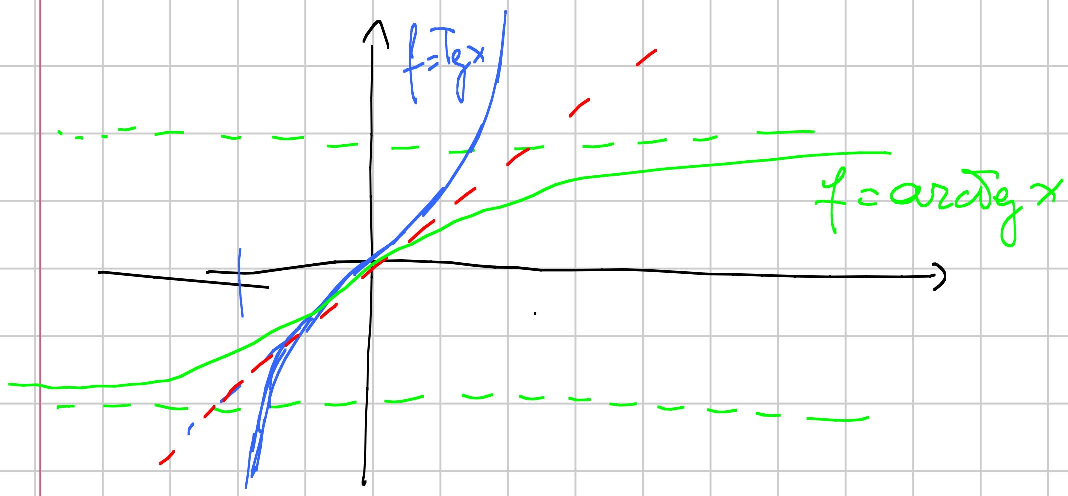
genera un ASSURDO ↯

$f(x) = Tg(x) \qquad f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$

f è strett. crescente e continua

$\Rightarrow \exists\, f^{-1} = arctg(x) \qquad f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

strettamente crescente e continua



Def $f: A \to B$ si dice

- iniettiva se $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y) \quad \forall x, y \in A$
- suriettiva se $\forall y \in B \ \exists x \in A : f(x) = y$
- biiettiva se è suriettiva e iniettiva, ovvero $\forall y \in B \ \exists! \, x \in A : f(x) = y$

Esempio $f(x) = x^2 \quad f: \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ suriettiva
non iniettiva

Esempio $f(x) = \cos x \quad f: [0, \pi] \to \mathbb{R}$ iniettiva
non suriettiva

$f(x) = \cos x \quad f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ non iniettiva
non suriettiva

Teorema (continuità di f^{-1})

Sia $f: I \to f(I)$ tale che

- I intervallo
- f continua su I
- f strettamente monotona

allora $\exists\, g = f^{-1}: f(I) \to I$

continua e strettamente monotona su $f(I)$ intervallo

dim

Essendo $f: I \to f(I)$
I intervallo
f strettamente monotona
f continua

allora $J = f(I)$ intervallo (Teorema Valori Intermedi)

$\exists\, g = f^{-1}: J \to I$ strettamente monotona (vedi Teorema precedente)

Bisogna provare che $g = f^{-1}$ è continua

$g: J \to g(J) = I$
J intervallo
$g(J)$ intervallo
g strettamente monotona

Teorema precedente

$\Rightarrow g: J \to I$ è continua

e questo prova il Teorema