

Venerdì 16 novembre aula A 10.30-12.30

" " " " aula F 14.30-16.30

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \{S_n\}_n \quad \leftarrow \text{è una successione} \quad S_n = \sum_{k=0}^n a_k$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \quad \leftarrow \text{è un numero } \overline{\mathbb{R}}$$

Studiare la convergenza di $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ non

tiene conto dei primi 10^{10} termini della serie

Neppure la somma ne tiene conto!

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k - \left(\frac{1}{2}\right)^0 - \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 2 - 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Serie a termini di segno alterno

Esempio $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots$

• Ricordiamo che $\sum_n \frac{1}{n}$ diverge a $+\infty$

• $\sum_n (-1)^n \frac{1}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$

$S_1 = -1$ $S_2 = -\frac{1}{2}$

$S_3 = -\frac{5}{6}$ $S_4 = -\frac{5}{6} + \frac{1}{4} = \frac{-20+6}{24} = -\frac{7}{12}$

• S_{2n} è una "successione monotona e limitata", $S_{2n} \rightarrow l_p$

• S_{2n+1} " " " " $S_{2n+1} \rightarrow l_d$

• $S_{2n+1} - S_{2n} = (-1)^{2n+1} \cdot \frac{1}{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

• $\{S_{2n}\}_n \cup \{S_{2n+1}\}_n \equiv \{S_n\}_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = l_p = l_d$

Teorema (Criterio di Leibniz)

$\sum_m (-1)^m \cdot Q_m$ tale che

• $Q_m \geq 0 \quad \forall m$

• $\lim_{m \rightarrow +\infty} Q_m = 0$

• $Q_{m+1} \leq Q_m \quad \forall m$, ovvero
 Q_m monotona decrescente
debolmente
dim.

$\Rightarrow \sum_m (-1)^m Q_m$
Converge

• $S_{2m} = \sum_{k=0}^{2m} (-1)^k \cdot Q_k$ è monotona decrescente 0

$S_0 = Q_0 \geq S_2 = \sum_{k=0}^2 (-1)^k Q_k = Q_0 - Q_1 + Q_2 = Q_0 - (Q_1 - Q_2)$

per induzione: Suppongo che $S_{2m-2} \geq S_{2m}$

$S_{2m} = \sum_{k=0}^{2m} (-1)^k Q_k \geq S_{2m+2} = \sum_{k=0}^{2m+2} (-1)^k Q_k = S_{2m} - (Q_{2m+1} - Q_{2m+2})$

• S_{2m+1} è monotona crescente

$S_1 = Q_0 - Q_1 \leq S_3 = S_1 + Q_2 - Q_3$

Suppongo (ipotesi induttiva) $S_{2m+1} \geq S_{2m-1}$

$S_{2m+1} \leq S_{2m+3} = S_{2m+1} + (Q_{2m+2} - Q_{2m+3})$

$$\bullet S_{2m} \geq S_{2m+1} \quad \forall m$$

inoltre $S_0 = a_0 \geq a_0 - a_1 = S_1$

$$S_{2m} = \sum_{k=0}^{2m} (-1)^k a_k = S_{2m-1} + a_{2m} \geq S_{2m-1}$$

$$S_{2m+1} = S_{2m} - a_{2m+1} \leq S_{2m}$$

$S_{2m} \searrow$
 $\downarrow$
 $S_0 \geq S_{2m} \geq S_1$

segue dal punto precedente

$$\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2m} = l_p$$

$S_{2m} \searrow$
 per il punto precedente
 $\downarrow$
 $S_0 \geq S_{2m+1} \geq S_1$

$S_{2m+1} \nearrow$
 $\downarrow$
 $S_{2m+1} \nearrow$

$$\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2m+1} = l_d$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_{2m+1} - S_{2m}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^{2m+1} \cdot a_{2m+1} = 0$$

1)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2m+1} - \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2m} = l_d - l_p$$

$$\Rightarrow l_d = l_p = S$$

$$\{S_{2m}\}_m \cup \{S_{2m+1}\}_m = \{S_m\}_m$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} S_m = S$$



Exempis Convergente $\nRightarrow$ convergente assoluta

In fatti,

$\sum_n (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ è convergente per il criterio di Leibniz

però

$\sum_n \left| (-1)^n \cdot \frac{1}{n} \right| = \sum_n \frac{1}{n}$ diverge a $+\infty$

Exempis

$\sum_n (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$ è convergente x il criteri

Dom Come approssimare la somma di

$$\sum_n (-1)^n \cdot Q_n \quad \leftarrow \begin{array}{l} Q_n > 0 \\ Q_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \\ \text{ou decrescente} \end{array}$$

serie a termini segno alterno

$$S_{2n} \text{ nono decrescenti} \quad S_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S$$

$$S_{2n+1} \text{ nono crescenti} \quad S_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S$$

$$\rightarrow S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Downarrow$$

$$0 \leq S - S_{2n+1} \leq S_{2n} - S_{2n+1}$$

$$0 \leq S - S_{2n+1} \leq -(-1)^{2n+1} \cdot Q_{2n+1} = Q_{2n+1}$$

$$S_{2n+1} - S_{2n} \leq S - S_{2n} \leq 0$$

$$-Q_{2n+1} = (-1)^{2n+1} \cdot Q_{2n+1} \leq S - S_{2n} \leq 0$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{l} -Q_n \text{ se } n \text{ dispari} \\ -Q_{n+1} \text{ " " pari} \end{array} \leq S - S_n \leq \begin{cases} Q_n \text{ se } n \text{ dispari} \\ Q_{n+1} \text{ se } n \text{ pari} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$|S - S_n| \leq \begin{cases} Q_n \text{ se } n \text{ dispari} \\ Q_{n+1} \text{ se } n \text{ pari} \end{cases}$$

$$\sum_n (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k \cdot \frac{1}{k}$$

$$S_2 = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$|S - S_2| \leq Q_3 = \frac{1}{3}$$

$$S_4 = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = -\frac{7}{12}$$

che errore commetto prendendo S_4 in luogo di S ?

$$|S - S_4| \leq a_5 = \frac{1}{5}$$

Viceversa

Voglio approssimare la somma S a meno di

$\frac{1}{100}$: quanti termini debbo conteggiare?

Che ridotto devo prendere?

$$|S - S_n| \leq \frac{1}{100}$$

ossia che

$$|S - S_{100}| \leq \frac{1}{101} < \frac{1}{100} \Rightarrow \text{devo prendere } S = S_{100}$$

Teorema (Criterio Leibniz)

$\sum_n (-1)^n \cdot a_n$ una serie numerica te.

i) $a_n \geq 0 \quad \forall n$

ii) $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n$

iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

allora $\sum_n a_n$ converge
dim

$$S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k \quad S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k \quad S_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k a_k$$

- S_{2n} è decrescente e $S_{2n} \leq S_0 \quad \forall n$

$$S_2 = a_0 + \overbrace{(-a_1 + a_2)}^{0} \leq S_0$$

$$\S S_{2n+2} = S_{2n} + \underbrace{(-a_{2n+1} + a_{2n})}_0 \leq S_{2n}$$

- S_{2n+1} è crescente e $S_1 \leq S_{2n+1} \quad \forall n$

$$S_3 = S_1 + \overbrace{(a_2 - a_3)}^{0} \geq S_1$$

$$\S S_{2n+3} = S_{2n+1} + \underbrace{(a_{2n+2} - a_{2n+1})}_{0} \geq S_{2n+1}$$

- $S_{2n+1} \leq S_{2n} \quad \forall n$

$$S_1 = a_0 - a_1 \leq a_0 = S_0$$

$$\S S_{2n+1} = S_{2n} - a_{2n+1} \leq S_{2n}$$

Phononumunda

$$S_{2n} \text{ è monotone decrescente} \\ S_1 \leq S_{2n} \leq S_0 \quad \forall n \Rightarrow \exists l_p = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n}$$

S_{2n+1} è monotone crescente

$$S_1 \leq S_{2n+1} \leq S_0 \quad \forall n \Rightarrow \exists l_d = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_{2n} - S_{2n-1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} Q_{2n} = 0 \\ \parallel \\ l_p - l_d$$

$$\Rightarrow l_p = l_d \quad \left. \begin{array}{l} \\ \forall k \quad \{S_m\} = \{S_{2n}\} \cup \{S_{2n+1}\} \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = l$$

ovvero la serie converge $\swarrow$

Quesito: $\forall n \quad S_{2n} \searrow$ e $S_{2n+1} \nearrow$, quindi

$$S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$$

$$-Q_{2n+1} = S_{2n+1} - S_{2n} \leq S - S_{2n} \leq 0 \Rightarrow |S - S_{2n}| \leq Q_{2n+1}$$

$$0 \leq S - S_{2n+1} \leq S_{2n} - S_{2n+1} = Q_{2n+1} \Rightarrow |S - S_{2n+1}| \leq Q_{2n+1}$$

$$\text{Quindi, dato } \sum_n \frac{(-1)^n}{n} \text{ e } S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \dots$$

$$|S - S_6| \leq \frac{1}{7} \quad \text{come pure} \quad |S - S_7| \leq \frac{1}{7}$$

Viceversa, se si desidera approssimare la
somma della serie

$$\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$$

con un errore $< \frac{1}{16}$

allora si deve fare in modo che

$$|S - S_n| < \frac{1}{16}$$

ovvero è sufficiente prendere S_n t.e.

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{16} \quad \underline{\text{se}} \quad n > 16$$

$$\underline{\text{se}} \quad n \geq 17$$

$$\text{E infatti, } |S - S_{17}| \leq a_{17} = \frac{1}{17} < \frac{1}{16} \quad \checkmark$$

Se si vuole $|S - S_n| < \frac{1}{15}$ è sufficiente prendere

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{15} \quad \underline{\text{se}} \quad n > 15 \quad \text{se } n = 16$$

$$|S - S_{16}| \leq a_{17} = \frac{1}{17} < \frac{1}{15}$$

PROBLEMA 3

a) Determinate per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \left[\frac{3}{n} - e^{1/n} \sin \frac{3}{n} \right];$$

b) Determinate per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^{\alpha} \left[\frac{3}{n-1} - e^{1/n} \sin \frac{3}{n} \right].$$

$$a) Q_n = n^{\alpha} \left[\frac{3}{n} - e^{1/n} \sin \frac{3}{n} \right]$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \quad x \rightarrow 0$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

$$n \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

$$e^{1/n} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$\sin \frac{3}{n} = \frac{3}{n} - \frac{1}{6} \cdot \frac{27}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

$$Q_n = n^{\alpha} \left[\frac{3}{n} - \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \left(\frac{3}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \right]$$

$$= n^{\alpha} \left[\frac{3}{n} - \frac{3}{n} - \frac{3}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right]$$

$$= n^{\alpha} \left[-\frac{3}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] = Q_n$$

$$\alpha \geq 2 \quad \text{allora} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n \neq 0$$

$$Q_n = -\frac{3}{n^{2-\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2-\alpha}}\right)$$

$$\alpha > 2 \quad Q_n = n^\alpha \left[-\frac{3}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

$$\alpha = 2 \quad Q_n = -3 + o(1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -3 \neq 0$$

quindi se $\alpha \geq 2$ la serie non converge

$$\alpha < 2 \quad Q_n = n^\alpha \left[-\frac{3}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right]$$

$$Q_n = \left(-\frac{3}{n^{2-\alpha}} \right) + o\left(\frac{1}{n^{2-\alpha}}\right) \quad n \rightarrow +\infty$$

$$Q_n \sim -\frac{3}{n^{2-\alpha}} \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty$$

$$\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{Q_n}{-\frac{3}{n^{2-\alpha}}} = 1 ! \right)$$

$$\sum_n -\frac{3}{n^{2-\alpha}} \text{ converge } \underline{\text{se}} \quad 2-\alpha \geq 1$$

$$\underline{\text{se}} \quad 1 > \alpha$$

la serie $\sum_n Q_n$ converge se $\alpha < 1$
 (diverge se $\alpha \geq 1$)

$$b) Q_n = n^\alpha \left[\frac{3}{n-1} - e^{\frac{1}{n}} \cdot \exp \frac{3}{n} \right] \quad n \rightarrow +\infty$$

$$Q_n = n^\alpha \left[\frac{3}{n-1} - \right.$$

$$\left. \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) \left(\frac{3}{n} - \frac{1}{6} \cdot \frac{27}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) \right]$$

$$= n^\alpha \left[\frac{3}{n-1} - \left(\frac{3}{n} - \frac{1}{6} \cdot \frac{27}{n^3} + \frac{3}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) \right]$$

$$= n^\alpha \left[\frac{3}{n-1} - \frac{3}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right]$$

$$= n^\alpha \left[\frac{n^2 - n(n-1) - (n-1)}{n^2(n-1)} + \frac{9}{2} \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right]$$

$$= n^\alpha \left[\frac{3}{n^2(n-1)} + \frac{9}{2} \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right]$$

$\alpha > 3$ non converge

$\alpha = 3$ " " $Q_n \not\rightarrow 0$

$\alpha < 3$ $Q_n \sim \frac{1}{n^{3-\alpha}}$ $\parallel \parallel \parallel$

$\sum_n \frac{1}{n^{3-\alpha}}$ Converge for $3-\alpha > 1$
 $\underline{n} \quad 2 > \alpha$