Lezione 17 - Analisi Matematica 1 - Giovedì 8/11/2012

Titolo nota 27/10/2012

$\sum_n a_n$ serie numerica di termine generale a_n

$\equiv$

$\{S_n\}_n \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$

Molto Importanti

Serie Geometrica $\sum_n q^n$
$$\begin{cases} \text{converge } |q|<1 \\ \text{diverge a } +\infty \text{ se } q \geq 1 \\ \text{indeterminata se } q \leq -1 \end{cases}$$
Serie geometrica

$|q|<1 \qquad \sum_{k=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

Serie armonica generalizzata $\sum_n 1/n^\alpha$:
$$\begin{cases} \text{converge se } \alpha > 1 \\ \text{diverge a } +\infty \text{ se } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Condizione Necessaria

$\sum_n a_n$ convergente $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

$\underline{\text{Oss}}$

Se $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$ allora $\sum_n a_n$ non converge

Oss $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \not\Rightarrow \sum_n a_n$ converge

imprecise

$$\sum_n (-1)^n = (1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+\dots \overset{?}{=} 0$$

$$\sum_n (-1)^n = 1\,(-1+1)\,(-1+1)\,(-1+1)-1+\dots \quad ?\overset{1}{\shortparallel}?$$

$$\sum_{k=0}^{4} a_k = a_0+a_1+a_2+a_3+a_4$$
$$= a_0+a_1+a_2+a_4+a_3$$

ovvero vale l'associativa

Oss Questi 5 elementi possono essere sommati in 5! modi ≠

$$\sum_n (-1)^n = \underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{1-1}_{0}+1}_{1}-1}_{0}+1}_{1}-1}_{\text{etc}}$$

$$\sum_n a_n = \underbrace{\underbrace{a_0+a_1}+a_2}+\dots$$

Def (Ridotte n-esima)

Data $\{a_n\}_n$ successione numeri reali

diciamo che S_n è la "ridotta n-esima"

se $$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

è la somma dei primi $n+1$ termini della successione

Def

Si dice "Serie di termine generale a_n"

e si indica con $\sum_n a_n$

la successione $\{S_n\}_n$ delle sue ridotte

n-esime, ovvero $$\sum_n a_n \equiv \{S_n\}_n \equiv \left\{\sum_{k=0}^{n} a_k\right\}_n$$

Oss S_n = ridotta n-esima ≡ somma parziale n-esima

Def Diciamo "somma della serie $\sum_n a_n$"

il numero reale (se esiste) $S = \lim_{n \to +\infty} S_n$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

Def $\sum_n a_n$ data la serie si dice che

questa è

Convergente se $\exists \lim_{n \to +\infty} S_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = S \in \mathbb{R}$

divergente se $\exists \lim_{n \to +\infty} S_n \in \{+\infty, -\infty\}$

indeterminata se $\nexists \lim_{n \to +\infty} S_n$

SERIE $\longleftrightarrow$ SUCCESSIONE RIDOTTE

Esempio

$\sum_n (-1)^n$ serie indeterminata

$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k$ $\quad S_0 = 1 \quad S_1 = \sum_{k=0}^{1} a_k = 1 - 1 = 0$

$S_2 = 1 \quad S_3 = 0$

...

$\{S_{2n}\}_n = \{1\}_n$ $\quad S_{2n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

$\Rightarrow S_n \not\to$

$\{S_{2n+1}\}_n = \{0\}_n$ $\quad S_{2n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

<u>Esempio</u>

$\sum_n a_n \qquad a_n = 1 \ \forall n$ $\qquad$ Serie divergente a $+\infty$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} 1 = \underbrace{1+1+\dots+1}_{n+1} = n+1$$

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$$

<u>Esempio</u> (Serie di Mengoli)

$\sum_n \frac{1}{n(n+1)}$ $\qquad$ Serie convergente

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad a_k = \frac{1}{k(k+1)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} =$$

$$= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \dots \cancel{+} \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1} \qquad \lim_{n \to +\infty} S_n = 1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

Esempio (IMPORTANTISSIMO

Serie armonica generalizzata)

$$\sum_n \frac{1}{n^\alpha} := \begin{cases} \text{convergente} & \alpha > 1 \\ \text{divergente a } +\infty & \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Esempio (Serie Geometrica)

$$\sum_n q^n \qquad q \in \mathbb{R}$$

$$\sum_n q^n \quad \begin{cases} \text{divergente a } +\infty \text{ se } q \geq 1 \\ \text{convergente a } \frac{1}{1-q} \text{ se } |q| < 1 \\ \text{indeterminata} \quad \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$$ somma parziale n-esima

(ridotta n-esima)

$$q = 1 \qquad S_n := \sum_{k=0}^{n} 1^k = n+1 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} 1^k = +\infty$$

$$q \neq 1 \qquad \sum_{k=0}^{n} q^k (1-q) = (1 + q + q^2 + \dots + q^n)(1-q)$$

$$= 1 + \cancel{q} + \cancel{q^2} + \cdots + \cancel{q^n}$$

$$- \cancel{q} - \cancel{q^2} + \cdots - \cancel{q^n} - q^{n+1}$$

$$= 1 - q^{n+1}$$

$$\left(\sum_{k=0}^{n} q^k\right)(1-q) = 1 - q^{n+1} \quad \text{e se } q \neq 1$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad q \neq 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$S_n = \begin{cases} n+1 & q = 1 \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & q \neq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{1 - \lim_{n \to +\infty} q^{n+1}}{1-q} \quad q \neq 1$$

$$\lim_{n \to \infty} S_n \begin{cases} q > 1 & \text{diverge a } +\infty \\ q = 1 & \text{" " "} \\ |q| < 1 & \text{converge a } 1/(1-q) \\ q = -1 & \text{indeterminata} \\ q < -1 & \text{indeterminata} \end{cases}$$

Infatti

$$\lim_{n\to+\infty} q^{n+1} := \begin{cases} +\infty & \text{se } q>1 \\ 0 & \text{se } |q|<1 \\ \nexists & \text{se } q\le -1 \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{|q|^n} = |q| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |q|$$

$$q>1 \Rightarrow q^n \longrightarrow +\infty \;; \quad |q|<1 \Rightarrow q^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$$q\le -1 \Rightarrow \nexists \lim_{n\to+\infty} q^n$$

$$q=-1 \quad \{q^{2n}\}_n = \{1\}_n \quad 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

$$\{q^{2n+1}\}_n = \{-1\}_n \quad -1 \xrightarrow[n\to\infty]{} -1$$

$$\neq \Rightarrow \nexists \lim_{n\to\infty} (-1)^n$$

$q<-1$ analogamente $\nexists \lim_{n\to\infty} q^n$

<u>Teorema</u> (Condizione necessaria)

Se $\sum_n a_n$ converge allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

<u>dim</u>

$\sum_n a_n$ converge

<u>se</u> $\exists \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = S \in \mathbb{R}$

allora $\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} (S_{n+1} - S_n)$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n+1} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_k \right)$$

limite di somme = somme dei limiti

$$= \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n+1} a_k - \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$$

$$= \lim_{n \to +\infty} S_{n+1} - \lim_{n \to +\infty} S_n = S - S = 0$$

ovvero $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

Oss $\sum_n 2^n$ visto che $2^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty \neq 0$

$\Rightarrow \sum_n 2^n$ diverge

Oss $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0 \not\Rightarrow \sum_n a_n$ converge

$\lim_{n \to +\infty} 1/n = 0$ ma $\sum_n 1/n$ diverge a $+\infty$

Teorema (Condizione necessaria e suff. per la convergenza di una serie)

Data $\sum_n a_n$ si ha che sono equivalenti

(i) $\sum_n a_n$ converge

(ii) $\forall \varepsilon>0\ \exists \bar{n}>0\ \forall n>\bar{n}\ \forall k\in\mathbb{N}\quad |a_{n+k}+a_{n+k-1}+\dots+a_{n+1}|<\varepsilon$

dim

definizione

$$\sum_n a_n \text{ converge} \iff \lim_{n\to+\infty} S_n = S\in\mathbb{R}$$

$$S_n=\sum_{k=0}^{n} a_k$$

Teorema Cauchy

$\iff \{S_n\}_n$ è di Cauchy

def successione Cauchy

$\iff \forall \varepsilon>0\ \exists \bar{n}>0\ \forall n>\bar{n}\ \forall k\in\mathbb{N}\quad |S_{n+k}-S_n|<\varepsilon$

$\iff \forall \varepsilon>0\ \exists \bar{n}>0\ \forall n>\bar{n}\ \forall k\in\mathbb{N}\quad \left|\sum_{i=0}^{n+k} a_i-\sum_{i=0}^{n} a_i\right|<\varepsilon$

$\iff \forall \varepsilon>0\ \exists \bar{n}>0\ \forall n>\bar{n}\ \forall k\in\mathbb{N}$

$$\left|\left(\cancel{a_0+a_1+\dots+a_n}\right)+a_{n+1}+\dots+a_{n+k}\right)-\left(\cancel{a_0+a_1+\dots+a_n}\right)\Big|<\varepsilon$$

$\forall \varepsilon>0\ \exists \bar{n}>0\ \forall n>\bar{n}\ \forall k\in\mathbb{N}\quad |a_{n+1}+\dots+a_{n+k}|<\varepsilon$

Esempio (Importante)

$\sum_n 1/n$ diverge a $+\infty$ $\quad (\alpha = 1)$

Serie armonica

dim

$S_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$ voglio provare $S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

Osserviamo che $S_n < S_{n+1}$ (è crescente)

quindi $\exists \lim_{n \to +\infty} S_n = \sup \{ S_n : n \geq 1 \}$ $\begin{cases} +\infty \\ \in \mathbb{R} \end{cases}$

$\nexists$ suff $\{S_n\}_n$ non è di Cauchy

$$\underset{a_{2n}}{\frac{1}{2n}} + \underset{a_{2n-1}}{\frac{1}{2n-1}} + \dots + \underset{a_n}{\frac{1}{n}} > \overbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n}}^{n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

$\exists \varepsilon > 0 : \forall \bar{n} > 0 \ \exists n \geq \bar{n} \ \exists k \in \mathbb{N} : |a_{n+k} + \dots + a_n| \geq \varepsilon$

$\exists \varepsilon = 1/2 : \forall \bar{n} > 0 \ \exists n = \bar{n} \ \exists k = \bar{n} : |a_{\bar{n}+\bar{n}} + \dots + a_{\bar{n}}| =$

$= \left| \frac{1}{2\bar{n}} + \dots + \frac{1}{\bar{n}} \right| \geq 1/2$

$\lightning$

Applicazione $0,\overline{3} = 1/3$, $0,\overline{9} = 1$

$$2,\overline{13} = 2,131313\ldots =$$

$$1/3 = 0,3333\ldots = 0,\overline{3}$$

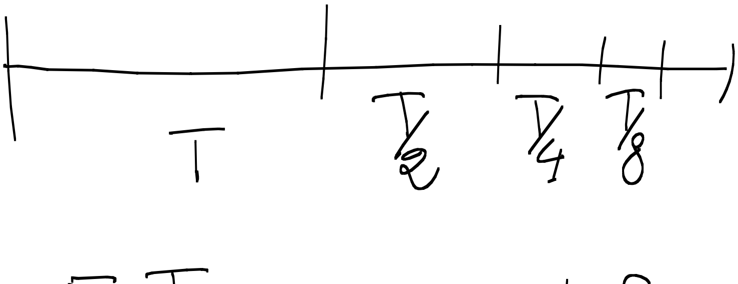
$$\leftarrow \quad 0,333\ldots \overset{?}{=} 1/3$$

$$0,\overline{3} = 0,333\ldots = 3\cdot\frac{1}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \cdots + \frac{3}{10^n} + \cdots$$

$$= \frac{3}{10}\left[1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots + \frac{1}{10^n} + \cdots\right]$$

$$= \frac{3}{10}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^k \qquad \left|\frac{1}{10}\right| < 1$$ quindi la serie converge

$$= \frac{3}{10}\cdot\frac{1}{1-1/10} = \frac{3}{10}\cdot\frac{1}{9/10} = \frac{1}{3}$$



$$\sum_k T/2^k$$ non è finita

$$2,\overline{16} = 2 + \frac{16}{100} + \frac{16}{(100)^2} + \frac{16}{(100)^3} + \cdots$$

$$= 2 + \frac{16}{100}\cdot\left[1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \cdots\right]$$

$$= 2 + \frac{16}{100} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10^2}\right)^k =$$

$$= 2 + \frac{16}{100} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{100}}$$

$$= 2 + \frac{16}{\cancel{100}} \cdot \frac{\cancel{100}}{99} = \frac{198+16}{99}$$

<u>Teorema</u>

Se $x \in \mathbb{R}$ ha uno sviluppo decimale periodico

allora $x \in \mathbb{Q}$

Ma essendo $S_n \leq S_{n+1}$ $\forall n \Rightarrow S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ ↯

Problema : perché studiare la convergenza di una serie di cui non si sa calcolare la somma ?

ovvero

quali sono le conseguenze della convergenza ?

$$S_n \to S \in \mathbb{R}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \quad |S - S_n| < \varepsilon$$

Domanda :

$$\sum_{n\geq 1} a_n \quad \text{e} \quad \sum_{n\geq 10^{100}} a_n$$

sono diverse?

Sono certamente $\neq$, però hanno lo stesso carattere
- convergente
- divergente
- indeterminato

pur avendo somme diverse

Problema: per la convergenza sono rilevanti i primi 10^{100} termini della serie?

Serie a Termini Positivi

Def $\sum_n a_n$ si dice "serie a termini positivi" se $a_n \geq 0 \quad \forall n$

Teorema Data $\sum_n a_n$ serie a termini positivi, allora questa non può essere indeterminata ovvero o converge o diverge

dim

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \quad \text{ridotta } n\text{-esima}; \quad a_k \geq 0 \quad \forall k$$

$$S_0 = \sum_{k=0}^{0} a_k = a_0$$

$$S_1 = \sum_{k=0}^{1} a_k = \sum_{k=0}^{0} a_k + a_1 = S_0 + \underset{\substack{\uparrow\\ \geq \\ 0}}{a_1} \geq S_0$$

$$S_2 = \sum_{k=0}^{2} a_k = \sum_{k=0}^{1} a_k + a_2 = S_1 + a_2 \geq S_1$$

$$a_2 \geq 0$$

...

$$S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_k + a_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n$$

$$a_{n+1} \geq 0$$

$\{S_n\}_n$ è monotona debolmente crescente $\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} S_n$ $\cancel{\exists}$

Esempio $\sum_n 1/n$ è a termini positivi

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

Esempio $\sum_n \left(\frac{1}{2}\right)^n$ è a termini positivi

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2$$

Criterio del confronto (serie a termini positivi)

Siano $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ due serie a termini positivi t.c. $a_n \leq b_n \quad \forall n \geq n_0$

(i) Se $\sum_n b_n$ converge allora $\sum_n a_n$ converge

(ii) Se $\sum_n a_n$ diverge a $+\infty$ allora $\sum_n b_n$ diverge a $+\infty$

dim

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \qquad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k \qquad n > n_0$$

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n_0} a_k + \sum_{k=n_0+1}^{n} a_k \leq A_{n_0} + \sum_{k=n_0+1}^{n} b_k$$

$$= A_{n_0} + \left(\sum_{k=0}^{n} b_k - \sum_{k=0}^{n_0} b_k\right)$$

$$= A_{n_0} + B_n - B_{n_0}$$

$$\Downarrow$$

$$A_n \leq (A_{n_0} - B_{n_0}) + B_n \qquad \forall n \geq n_0$$

Se $\lim_{n\to+\infty} A_n = +\infty$ allora $\lim_{n\to+\infty} B_n = +\infty$

Se $\lim_{n\to+\infty} B_n = B \in \mathbb{R}$ allora $\lim_{n\to+\infty} A_n = A \in \mathbb{R}$

$\lightning$

Esercizio $\sum_n 1/n^\alpha$ diverge a $+\infty$ $\forall \alpha \leq 1$

dim

$S_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$ • $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

• $\frac{1}{k^\alpha} \geq \frac{1}{k}$ $\forall \alpha \leq 1$ $\forall k \geq 1$

$\Rightarrow \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \right\}_n$ certamente diverge a $+\infty$

$|||$ $\forall \alpha \leq 1$ per il Teorema

$\sum_n 1/n^\alpha$ del confronto

Teorema (del confronto asintotico)

Date due serie $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ a termini positivi strettamente $a_n>0$ $b_n>0$

i) $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ e $\sum_n b_n$ converge $\Rightarrow \sum_n a_n$ converge

ii) $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ e $\sum_n a_n$ diverge $\Rightarrow \sum_n b_n$ diverge

iii) $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in]0,+\infty[\Rightarrow \sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ hanno lo stesso carattere

dim

(i) $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ $\quad \sum_n b_n$ converge

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \bar{n}>0 : \forall n>\bar{n} \quad -\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < \varepsilon$

$\quad$ " $\quad$ " $\quad$ " $\quad 0 \leq \frac{a_n}{b_n} < \varepsilon$

$\varepsilon=1 \quad \exists \bar{n}>0 \ \forall n>\bar{n} \quad a_n \leq b_n$

$\Downarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \ \forall n>\bar{n} \quad a_n \leq b_n \\ \bullet \ \sum_n b_n \text{ converge} \end{array}\right\} \Longrightarrow \sum_n a_n \text{ converge}$$

Teorema confronto

(ii) sostanzialmente identico a (i)

(iii) $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \in]0, +\infty[$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} > 0 \ \forall n > \bar{n} \qquad \ell - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < \ell + \varepsilon$

$\varepsilon = \ell/2 \ \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \qquad \ell/2 < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2}\ell$

$\Downarrow$

$\forall n > \bar{n} \qquad \frac{\ell}{2} \cdot b_n \le a_n \le \left(\frac{3}{2}\ell\right) \cdot b_n$

Le serie $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ hanno lo stesso carattere

Esercizio Provare che $\sum_n 1/n^\alpha$

- converge $\forall \alpha \geq 2$

dim

È noto che $\sum_n \frac{1}{n(n+1)}$ converge

serie di Mengoli

$a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ $\qquad b_n = 1/n^2$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n^2+n}}{1/n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2+n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+1/n} = 1$$

Teorema confronto asintotico

$\Rightarrow$ $\sum_n 1/n^2$ converge

Osserva $\frac{1}{n^2} \geq \frac{1}{n^\alpha}$ $\quad \forall \alpha \geq 2, \quad \forall n \geq 1$

Teorema confronto

$\Rightarrow \sum_n 1/n^\alpha$ converge $\forall \alpha \geq 2$ $\quad$ ↯

N.B. Abbiamo provato $\sum_n 1/n^\alpha$

converge $\alpha \geq 2$, diverge a $+\infty$ se $\alpha \leq 1$

al momento non so che succede $1 < \alpha < 2$

Verrà provato col criterio integrale improprio

che $\sum_n 1/n^\alpha$ converge $1 < \alpha < 2$

Esercizio: Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$,

il carattere di $\sum_n n^2 \log(1 + 1/n^\alpha)$

dim

i) $\alpha \leq 0$ $\qquad a_n = n^2 \log(1 + 1/n^\alpha) \geq n^2 \log 2$

$\Rightarrow a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty \Rightarrow \sum_n a_n$ diverge!

ii) $\alpha > 0$ $\quad \log(1+x) = x + o(x) \quad x \to 0$

$$\log\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right) = \frac{1}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

$$a_n = n^2 \log\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right) = \frac{\frac{1}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)}{\frac{1}{n^2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{\alpha-2}} = \begin{cases} +\infty & \alpha < 2 \\ 1 & \alpha = 2 \\ 0 & \alpha > 2 \end{cases}$$

Nel caso $\alpha > 2$ $\quad a_n = n^2 \log\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)$

$$= n^2\left(\frac{1}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{n^{\alpha-2}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha-2}}\right)$$

e dunque $a_n \sim \frac{1}{n^{\alpha-2}} \quad n \to +\infty$ perciò

$\sum_n a_n$ converge <u>sse</u> $\sum_n \frac{1}{n^{\alpha-2}}$ converge

Teorema del confronto asintotico

<u>sse</u> $\alpha - 2 > 1$ <u>sse</u> $\alpha > 3$

In definitiva $\sum_n a_n$ converge <u>sse</u> $\alpha > 3$ $\lightning$

Teorema (Criterio della radice n-esima)

Sia $\sum_n a_n$ una serie a termini positivi $a_n \geq 0$

ed esista $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$

i) $0 \leq l < 1$ allora $\sum_n a_n$ converge

ii) $1 < l$ allora $\sum_n a_n$ diverge

dim

ii) $1 < l$

$\varepsilon = \frac{1+l}{2} - 1 \stackrel{!}{=} \frac{l-1}{2}$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} > 0 \ \forall n > \bar{n} \qquad l - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < l + \varepsilon$

$\varepsilon = \frac{l-1}{2} \ \exists \bar{n} > 0 \ \forall n > \bar{n} \qquad l - \frac{l-1}{2} = \frac{1+l}{2} < \sqrt[n]{a_n}$

$\Downarrow$

- $\forall n > \bar{n} \qquad \left(\frac{1+l}{2}\right)^n \leq a_n$
- $\sum_n \left(\frac{1+l}{2}\right)^n$ diverge a $+\infty$: $\left(\frac{1+l}{2}\right) > 1$

$\Longrightarrow$

$\Longrightarrow \sum_n a_n$ diverge a $+\infty$

(i) $0 \leq l < 1$

$\varepsilon = 1 - \frac{1+l}{2} = \frac{l-1}{2}$

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \bar{n}>0 \ \forall n>\bar{n} \qquad \ell-\varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < \ell+\varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{1-\ell}{2} \ \exists \bar{n}>0 \ \forall n>\bar{n} \qquad 0 \le \sqrt[n]{a_n} < \ell + \frac{1-\ell}{2} = \frac{1+\ell}{2}$$

$$\Downarrow$$

- $\forall n>\bar{n} \qquad 0 \le a_n \le \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n$
- $\sum_n \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n$ converge : $0 < \frac{1+\ell}{2} < 1$

Teorema confronto

$$\Longrightarrow \quad \sum_n a_n \text{ converge} \quad \checkmark$$

<u>Esempio</u> (caso $\ell = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$)

$\sum_n 1/n$ si ha che $\sqrt[n]{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

e $\sum_n 1/n$ diverge a $+\infty$

$\sum_n 1/n^2$ si ha che $\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

e $\sum_n 1/n^2$ converge

Oss il caso $\ell = 1$ non è decidibile

$a_n = \frac{1}{n}$ $\quad \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \longrightarrow 1$ e $\sum_n 1/n$ diverge a $+\infty$

$a_n = 1/n^2$ $\quad \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} \longrightarrow 1$ e $\sum_n 1/n^2$ converge

Teorema (Criterio del rapporto)

$\sum_n a_n$ serie a termini strettamente positivi
$(a_n > 0 \ \forall n)$

$\exists \lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$

i) $0 \leq \ell < 1$ allora $\sum_n a_n$ converge

ii) $1 < \ell$ allora $\sum_n a_n$ diverge

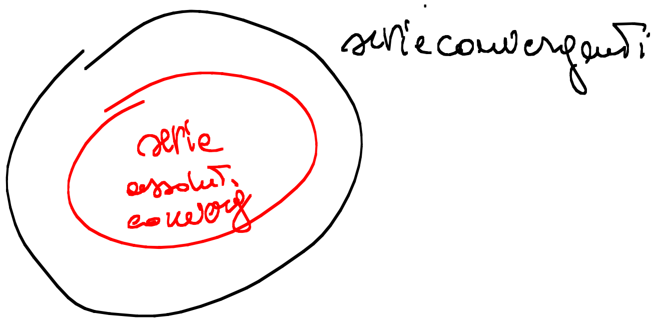
Serie a termini di segno $\forall$

Def Data una serie $\sum_n a_n$, questa "converge assolutamente" se $\sum_n |a_n|$ converge

Oss Convergenza assoluta $\Longleftrightarrow$

Convergenza serie di termine generale $|a_n|$

Oss Se $\sum_n a_n$ è a termini positivi allora convergenza sse convergenza assoluta



Teorema (Convergenza assoluta $\Rightarrow$ Convergenza)

Sia data $\sum_n a_n$ serie termini segno $\forall$

Se $\sum_n |a_n|$ converge allora $\sum_n a_n$ converge

dim

$\sum_n |a_n|$ converge

sse (Criterio Cauchy)

$$\forall \varepsilon>0 \; \exists \bar{n}>0 \; \forall n \geq \bar{n} \; \forall k \in \mathbb{N} \quad \big|\, |a_{n+k}| + |a_{n+k-1}| + \dots + |a_n| \,\big| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon>0 \; \exists \bar{n}>0 \; \forall n \geq \bar{n} \; \forall k \in \mathbb{N} \quad |a_{n+k}| + \dots + |a_n| < \varepsilon$$

$$|a_{n+k} + a_{n+k-1} + \dots + a_n| \leq |a_{n+k}| + \dots + |a_n|$$

$$\Longrightarrow \forall \varepsilon>0 \; \exists \bar{n} \; \forall n \geq \bar{n} \; \forall k \in \mathbb{N} \quad |a_{n+k} + \dots + a_n| < \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow \sum_n a_n \text{ converge} \quad ↯$$

Esempio (convergenza semplice non assoluta)

$$\underbrace{\sum_n \frac{(-1)^n}{n}}\ \text{converge ma}\ \sum_n \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_n 1/n$$

diverge a $+\infty$

(che $\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$ converge segue dal Teorema Leibniz)

Serie a termini di segno alterno

Teorema (Criterio Leibniz)

$\sum_n (-1)^n \cdot a_n$ una serie numerica t.c.

i) $a_n \geq 0 \quad \forall n$

ii) $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n$

iii) $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

allora $\sum_n a_n$ converge

dim

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k \qquad S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k \qquad S_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k a_k$$

- S_{2n} è decrescente e $S_{2n} \leq S_0 \ \forall n$

$$\bullet\ S_2 = a_0 + \overbrace{(-a_1 + a_2)}^{\leq 0} \leq S_0$$

§ $$S_{2n+2} = S_{2n} + \underbrace{(-a_{2n+1} + a_{2n})}_{\leq 0} \leq S_{2n}$$

- S_{2n+1} è crescente e $S_1 \leq S_{2n+1} \ \forall n$

$$S_3 = S_1 + \overbrace{(a_2 - a_3)}^{\geq 0} \geq S_1$$

§ $$S_{2n+3} = S_{2n+1} + \underbrace{(a_{2n+2} - a_{2n+1})}_{\geq 0} \geq S_{2n+1}$$

- $S_{2n+1} \leq S_{2n} \quad \forall n$

$$S_1 = a_0 - a_1 \leq a_0 = S_0$$

§ $$S_{2n+1} = S_{2n} - a_{2n+1} \leq S_{2n}$$

Riassumendo

S_{2n} è monotona decrescente
$S_1 \leq S_{2n} \leq S_0 \quad \forall n$ $\Rightarrow \exists\, l_p = \lim_{n\to+\infty} S_{2n}$

S_{2n+1} è monotona crescente
$S_1 \leq S_{2n+1} \leq S_0 \quad \forall n$ $\Rightarrow \exists\, l_d = \lim_{n\to+\infty} S_{2n+1}$

$$\underbrace{\lim_{n\to+\infty} \left(S_{2n} - S_{2n-1}\right)}_{= \, l_p - l_d} = \lim_{n\to+\infty} a_{2n} = 0$$

$\Rightarrow l_p \equiv l_d$
Ma $\{S_n\} = \{S_{2n}\} \cup \{S_{2n+1}\}$
$\Rightarrow \exists \lim_{n\to+\infty} S_n = l$

ovvero la serie converge

Oss: $\forall n \quad S_{2n} \searrow^{=}$ e $S_{2n+1} \nearrow^{=}$, quindi

$$S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$$

$$-a_{2n+1} = S_{2n+1} - S_{2n} \leq S - S_{2n} \leq 0 \Rightarrow |S - S_{2n}| \leq a_{2n+1}$$

$$0 \leq S - S_{2n+1} \leq S_{2n} - S_{2n+1} = a_{2n+1} \Rightarrow |S - S_{2n+1}| \leq a_{2n+1}$$

Quindi, data $\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$ e $S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ ..

$$|S - S_6| \leq \frac{1}{7} \quad \text{come pure} \quad |S - S_7| \leq \frac{1}{7}$$

Viceversa, se si desidera approssimare la somma della serie

$$\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$$

con un errore $< 1/16$

allora si deve fare in modo che

$$|S - S_n| < 1/16$$

ovvero è sufficiente prendere S_n t.c.

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{16} \quad \underline{se} \quad n > 16$$

$$\underline{se} \quad n \geq 17$$

E infatti $\quad |S - S_{17}| \leq a_{17} = \frac{1}{17} < \frac{1}{16}$

Se si vuole $|S - S_n| < 1/15$ è sufficiente prendere

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{15} \quad \underline{se} \quad n > 15 \quad se \quad n = 16$$

$$|S - S_{16}| \leq a_{17} = \frac{1}{17} < \frac{1}{15}$$