Teorema

$f: A \to \mathbb{R}$ $\quad x_0$ p.d.a. per A. Sono equivalenti

(i) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

(ii) $\forall \{x_n\} \subseteq A \setminus \{x_0\} \quad x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x_0 \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$

Teorema

$f: A \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in A$ $\quad x_0$ p.d.a. Sono equivalenti

(i) $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

(ii) $\forall \{x_n\} \subseteq A \quad x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x_0 \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$

Teorema

Dato $\{a_n\}_n$, esiste $\{a_{k_n}\}_n$ monotona

Teorema

Dato $\{a_n\}_n$ monotona deb. crescente (decrescente)

allora $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = \sup\{a_n : n\in\mathbb{N}\}$
$(\inf\{a_n : n\in\mathbb{N}\}$

Teorema (Bolzano Weierstrass)

$\{a_n\}_n$ succ. limitata $\Rightarrow \exists \{a_{k_n}\}$ convergente

ovvero $\exists \lim_{n\to+\infty} a_{k_n} = \ell \in \mathbb{R}$

Corollario

A insieme infinito e limitato $\Rightarrow \exists \{x_n\}_n \subseteq A$: $\exists \lim_{n\to+\infty} x_n = \ell \in \mathbb{R}$

Teorema ($\exists$ successione di punti di A convergente a $\Lambda = \sup A$)

$\lambda = \inf A$ $\Lambda \notin A$ $\Rightarrow \exists \{x_n\}_n \subseteq A$ $\lim_{n\to+\infty} x_n = \lambda = \inf A$
$A \subseteq \mathbb{R}$

dim

$\Lambda = +\infty \Rightarrow$ per la caratterizzazione del $\sup A$

$\forall M \in \mathbb{R}$ $\exists \bar{a} \in A$: $M < \bar{a}$

$\Downarrow$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists \bar{a}_n$: $n < \bar{a}_n$

$\lim_{n\to+\infty} \bar{a}_n = +\infty$ e quindi $\bar{a}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Lambda = +\infty$

$\Lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow$ per la caratterizzazione del $\sup A = \Lambda$

$$\begin{cases} a < \Lambda \quad \forall a \in A. \quad (\Lambda \notin A) \\ \underline{\forall \varepsilon > 0} \ \exists \underline{\bar{a}} \in A \quad \Lambda - \varepsilon < \bar{a}. \end{cases}$$

$\Downarrow \varepsilon = 1/n$

$\forall 1/n \quad \exists \bar{a}_n \quad \Lambda - 1/n < \bar{a}_n < \Lambda$

$\forall n \quad \exists \bar{a}_n \quad \underbrace{\Lambda - 1/n}_{\downarrow \Lambda} < \bar{a}_n < \underbrace{\Lambda}_{\downarrow \Lambda}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \bar{a}_n = \Lambda$ $\quad \lightning$

<u>Teorema</u> (di Weierstrass)

Data $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $\quad [a,b]$ intervallo chiuso e limitato

Se f è continua $\forall x \in [a,b]$

allora $\exists x_m \in [a,b] \quad f(x_m) = \min f([a,b])$

$\exists x_M \in [a,b] \quad f(x_M) = \max f([a,b])$

dim

proviamo che $\exists\, x_m \in [a,b]$ punto di minimo per f

cioè $f(x_m) = \min f([a,b])$

Essendo $f([a,b]) \subseteq \mathbb{R}$, $\exists\, \lambda = \inf f([a,b])$

(naturalmente $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$)

$\nexists\ \lambda \in f([a,b])$

Essendo λ l'estremo inferiore di $f([a,b])$,

$\lambda \notin f([a,b]) \overset{\text{lemma precedente}}{\Longrightarrow} \exists \{y_n\} \subseteq f([a,b]) : \lim_{n\to+\infty} y_n = \lambda$

$\Rightarrow \exists \{x_n\}_n \subseteq [a,b] : \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lambda$

ma $\{x_n\}_n \subseteq [a,b] \overset{\text{Bolzano Weierstrass}}{\Longrightarrow} \exists \{x_{k_n}\}_n \ \lim_{n\to+\infty} x_{k_n} = \overline{x}$

$\overline{x} \in [a,b]$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x_{k_n}) = \lambda = \inf f([a,b])$ (1)

$\{f(x_{k_n})\}_n$ è sottosuccessione di $\{y_n\}_n$

Però f è continua in $\overline{x} \in [a,b]$, $x_{k_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \overline{x}$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x_{k_n}) = f\left(\lim_{n\to+\infty} x_{k_n}\right) = f(\overline{x})$ (2)

Teorema continuità f.ni via successioni

$$\underset{(1)+(2)}{\Longrightarrow} f(\bar{x}) = \lambda = \inf f([a,b]) \qquad \bar{x} \in [a,b]$$

ovvero $\lambda \in f([a,b])$

Analogamente si procede per l'estremo superiore

$\Lambda = \sup f([a,b])$ supponiamo $\Lambda \notin f([a,b])$

Allora $\exists \{y_n\}_n \subseteq f([a,b]) \qquad y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \Lambda$

Allora $\exists \{x_n\} \subseteq [a,b] \qquad f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Lambda$

Ma $a \leq x_n \leq b \Rightarrow \exists x_{k_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \bar{x}$

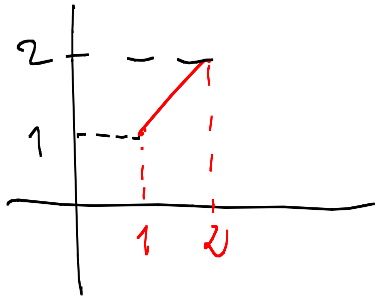
$\lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_{k_n}\right) = f(\bar{x})$ x la continuità di f

ma $\{f(x_{k_n})\}$ è una estratto di $y_n \Rightarrow f(x_{k_n}) \to \Lambda$

$$\Longrightarrow f(\bar{x}) = \Lambda = \max f([a,b]) \qquad \lightning$$

Esempio $\quad f(x) = x \qquad [a,b] = [1,2]$

$$\min f([1,2]) = 1 \qquad \max f([1,2]) = 2$$



Esempio

$$F(x) = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{sen}\left(\log\left(1+x^3\right)\right)\right)$$

$$x \in [1, 10^7]$$

$\exists \max F([1,10^7])$? $\qquad \exists \min F([1,10^7])$?

$f(x) = \log(1+x^3)$ è continua su $[1,10^7]$

$g(y) = \operatorname{sen} y$ " " " $\mathbb{R}$

$h(z) = \operatorname{arctg}(z)$ " " " $\mathbb{R}$

dunque

$F(x) = h(g(f(x)))$ è continua su $[1,10^7]$

x il Thm Weierstrass $\exists \max F([1,10^7])$

e il minimo di $F([1,10^7])$

Oss Il Teorema di Weierstrass NON AIUTA a calcolare il valore del max o del min

Def (Successione di Cauchy)

$\{a_n\}_n$ si dice Successione di Cauchy se

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{m} > 0 : \forall n, m \geq \bar{m} \quad |a_n - a_m| < \varepsilon$ (a)

ovvero

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} > 0 : \forall n \geq \bar{n} \ \forall k \in \mathbb{N} \quad |a_{n+k} - a_n| < \varepsilon$ (a')

(a) è equivalente ad (a')

Oss la def di Succ. di Cauchy non utilizza la nozione di limite in modo diretto

Teorema (Se $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$ allora a_n è di Cauchy)

Dato $\{a_n\}_n$ successione reale

Se $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$ allora $\{a_n\}_n$ è una successione di Cauchy

dim

per ipotesi $\forall \varepsilon>0\ \exists \bar{n} : \forall n>\bar{n} \quad l-\varepsilon < a_n < l+\varepsilon$

" " $\forall \varepsilon>0\ \exists \bar{n}\ \forall m>\bar{n} \quad l-\varepsilon < a_m < l+\varepsilon$

$\Downarrow$

$\forall \varepsilon>0\ \exists \bar{n} : \forall n>\bar{n} \quad l-\varepsilon < a_n < l+\varepsilon$

$\forall \varepsilon>0\ \exists \bar{n} : \forall m>\bar{n} \quad -l-\varepsilon < -a_m < -l+\varepsilon$

$\Downarrow$

$\forall \varepsilon>0\ \exists \bar{n}\ \forall n, m>\bar{n} \quad -2\varepsilon < a_n - a_m < 2\varepsilon$

$\Updownarrow$

$\forall \varepsilon>0\ \exists \bar{n}\ \forall n, m>\bar{n} \quad |a_n - a_m| < 2\varepsilon$

$\Updownarrow$

$\{a_n\}_n$ è di Cauchy

Vale anche il viceversa

Teorema (se $\{a_n\}_n$ è di Cauchy allora converge)

Se $\{a_n\}_n$ è di Cauchy allora $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$

Primo Passo Se $\{a_n\}_n$ è di Cauchy allora $\{a_n\}_n$ è limitata

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \bar{n} \ \forall n,m \geq \bar{n} \qquad -\varepsilon < a_n - a_m < \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \bar{n} \ \forall n \geq \bar{n} \quad m=\bar{n} \quad -\varepsilon < a_n - a_{\bar{n}} < \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\varepsilon = 1 \quad \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n} \quad m=\bar{n} \quad a_{\bar{n}} - 1 < a_n < a_{\bar{n}} + 1$$

$$\Downarrow$$

$$\forall n \geq \bar{n} \qquad |a_n| \leq |a_{\bar{n}}| + 1$$

Sia $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{\bar{n}}|\}$

$$\Downarrow$$

$$|a_n| \leq \max\{M, |a_{\bar{n}}|+1\} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

__Secondo Passo__ Se $\{a_n\}_n$ è di Cauchy allora

esiste $\{a_{k_n}\}_n$ convergente a $l \in \mathbb{R}$

Ovvio : $\{a_n\}_n$ di Cauchy $\overset{\text{Passo 1}}{\Longrightarrow}$ $\{a_n\}_n$ è limitata

$\overset{\text{Teorema Bolzano Weierstrass}}{\Longrightarrow} \exists \{a_{k_n}\}_n$ successione estratta convergente

ovvero $\exists \lim_{n\to\infty} a_{k_n} = l \in \mathbb{R}$

Passo Terzo:

Se $\{a_n\}_n$ è di Cauchy ed $\exists \{a_{k_n}\}_n$ sottosuccessione t.c. $\exists \lim_{n\to\infty} a_{k_n} = \ell$ $\overset{\mathbb{R}}{\Downarrow}$

allora $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = \ell$

Per ipotesi

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \bar{n}_1 : \forall n \geq \bar{n}_1 \quad |a_{k_n} - \ell| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \bar{n}_2 \ \forall n, m \geq \bar{n}_2 \quad |a_n - a_m| < \varepsilon$$

prendo $\bar{n} = \max\{\bar{n}_1, \bar{n}_2\}$

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \bar{n} : \forall n, m \geq \bar{n} \quad \begin{cases} |a_{k_n} - \ell| < \varepsilon \\ |a_n - a_m| < \varepsilon \end{cases}$$

$$|a_n - \ell| = |a_n - a_{k_n} + a_{k_n} - \ell|$$

$$\leq |a_n - a_{k_n}| + |a_{k_n} - \ell|$$

$$< \varepsilon + \varepsilon \quad \text{in quanto}$$

$$n \geq \bar{n} \Rightarrow k_n \geq k_{\bar{n}} \geq \bar{n} \Rightarrow \begin{cases} |a_n - a_{k_n}| < \varepsilon \\ |a_{k_n} - \ell| < \varepsilon \end{cases}$$

Ma allora

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \bar{n}>0 : \forall n > \bar{n} \quad |a_n - \ell| < 2\varepsilon$$

ovvero $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$

Lezione 17 - Analisi Matematica 1 - Giovedì 8/11/2012

Titolo nota 27/10/2012

imprecisa

$$\sum_n (-1)^n = (1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+\dots = 0$$

$$\sum_n (-1)^n = 1\,(-1+1)(-1+1)(-1+1)-1+\dots = 1$$

$$\sum_{k=0}^{4} a_k = a_0+a_1+a_2+a_3+a_4$$

$$= a_0+a_1+a_2+a_4+a_3$$

ovvero vale l'associativa

Questa somma si può indicare, fare in 5! modi

permutazioni

$$\sum_n (-1)^n = (((1)-1)+1)-1+1-1$$

$$= 0+1-1+1-1+1$$

$$= 1-1+1$$

$$\sum_n a_n = \underbrace{\underbrace{a_0+a_1}+a_2}+\dots$$

Def (Ridotte n-esime)

Data $\{a_n\}_n$ successione numeri reali

diciamo che S_n è la "ridotta n-esima"

se $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$

è la somma dei primi $n+1$ termini della successione

Def

Si dice "Serie di termine generale a_n"

e si indica con $\sum_n a_n$

la successione $\{S_n\}_n$ delle sue ridotte n-esime, ovvero $\sum_n a_n \equiv \{S_n\}_n$

$$\equiv \left\{\sum_{k=0}^{n} a_k\right\}_n$$

Oss S_n = ridotta n-esima ≡ somma parziale n-esima

Def Diciamo "somma della serie $\sum_n a_n$"

il numero reale (se esiste) $S = \lim_{n \to +\infty} S_n$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

Def $\sum_n a_n$ data la serie si dice che

questa è

convergente se $\exists \lim_{n \to +\infty} S_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = S \in \mathbb{R}$

divergente se $\exists \lim_{n \to +\infty} S_n \in \{+\infty, -\infty\}$

indeterminata se $\nexists \lim_{n \to +\infty} S_n$

SERIE $\longleftrightarrow$ SUCCESSIONE RIDOTTE

Esempio

$\sum_n (-1)^n$ serie indeterminata

$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \qquad S_0 = 1 \qquad S_1 = \sum_{k=0}^{1} a_k = 1 - 1 = 0$

$S_2 = 1 \qquad S_3 = 0$

...

$$\{S_{2n}\}_n = \{1\}_n \qquad S_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

$$\{S_{2n+1}\}_n = \{0\}_n \qquad S_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow S_n \not\to$$

<u>Esempio</u>

$$\sum_n a_n \qquad a_n = 1 \ \forall n \qquad \text{Serie divergente a } +\infty$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} 1 = \underbrace{1+1+\dots+1}_{n+1} = n+1$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$$

<u>Esempio</u> (Serie di Mengoli)

$$\sum_n \frac{1}{n(n+1)} \qquad \text{Serie convergente}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad a_k = \frac{1}{k(k+1)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} =$$

$$= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \dots \cancel{+} \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1} \qquad \lim_{n\to+\infty} S_n = 1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

Esempio (IMPORTANTISSIMO)

(Serie armonica generalizzata)

$$\sum_n \frac{1}{n^\alpha} := \begin{cases} \text{convergente} & \alpha > 1 \\ \text{divergente a } +\infty & \alpha \le 1 \end{cases}$$

Esempio (Serie Geometrica) (IMPORTANTISSIMO)

$$\sum_n q^n \qquad q \in \mathbb{R}$$

$$\sum_n q^n \begin{cases} \text{divergente a } +\infty \text{ se } q \geq 1 \\ \text{convergente a } \frac{1}{1-q} \text{ se } |q| < 1 \\ \text{indeterminata se } q \le -1 \end{cases}$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$$ somma parziale n-esima

(ridotta n-esima)

$$q = 1 \qquad S_n := \sum_{k=0}^{n} 1^k = n+1$$

$$q \neq 1 \qquad \sum_{k=0}^{n} q^k (1-q) = (1+q+q^2+\dots+q^n)(1-q)$$

$$= 1 + \cancel{q} + \cancel{q^2} + \dots + \cancel{q^n}$$

$$- \cancel{q} - \cancel{q^2} + \dots - \cancel{q^n} - q^{n+1}$$

$$= 1 - q^{n+1}$$

$$\left(\sum_{k=0}^{n} q^k\right)(1-q) = 1 - q^{n+1} \qquad q \neq 1$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$S_n = \begin{cases} n+1 & q = 1 \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & q \neq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{1 - \lim_{n \to +\infty} q^{n+1}}{1-q} \quad q \neq 1 \ ; \quad \lim_{n \to +\infty} S_{n+1} = +\infty \quad q = 1$$

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \begin{cases} q > 1 & \text{diverge a } +\infty \\ q = 1 & \text{'' '' } +\infty \\ |q| < 1 & \text{converge a } 1/(1-q) \\ q = -1 & \text{indeterminata} \\ q < -1 & \text{''} \end{cases}$$

$$\lim_{n\to+\infty} q^{n+1}$$

$q>1$ $\quad \lim_{n\to+\infty} q^{n+1} = +\infty$

$|q|<1$ $\quad |q|^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Rightarrow q^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$q=-1$ $\quad \lim_{n\to+\infty} q^{n+1}$ non esiste

$q<-1$ $\quad \lim_{n\to+\infty} q^{n+1}$ non esiste infatti

$$\{q^{n+1}\}_n \begin{cases} \{q^{2n+1}\}_n & q^{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty \\ \{q^{2n+2}\}_n & q^{2n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \end{cases} \quad \nexists$$

<u>Teorema</u> (Condizione necessaria)

Se $\sum_n a_n$ converge allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

<u>dim</u>

$\sum_n a_n$ converge

<u>cioè</u> $\exists \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = S \in \mathbb{R}$

allora $\quad \lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} (S_{n+1} - S_n)$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n+1} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_k \right)$$

Limite somma = somma limiti

$$= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n+1} a_k - \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$$

$$= \lim_{n\to+\infty} S_{n+1} - \lim_{n\to+\infty} S_n = S - S = 0$$

Oss

Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ allora non è detto $\sum_n a_n$ converge

Esempio $\lim_{n\to+\infty} 1/n = 0$ ma $\sum_n 1/n$ diverge a $+\infty$

(vedi più avanti)