Lezione 16 - Analisi I - Martedì 6 Novembre 2012

Titolo nota 25/10/2012

Venerdì 9 11.30 13.30 Aula A Lezione

" " 14.30 16.30 " " Esercitazioni

Teorema (limitato × infinitesimo = infinitesimo)

Date $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$ tali che successioni reali

1) $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

2) $\exists c \in \mathbb{R}$ t.c. $|b_n| \le c \quad \forall n$

Allora $\lim_{n\to+\infty} a_n \cdot b_n = 0$

dim

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \bar{n} \ \forall n \ge \bar{n} \quad |a_n| < \varepsilon \iff \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

$\exists c>0 \ \forall n \in \mathbb{N} \quad |b_n| < c$

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \bar{n} \ \forall n \ge \bar{n} \quad |a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| < c \cdot \varepsilon$

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \bar{n} \ \forall n > \bar{n} \quad \left|\frac{a_n \cdot b_n}{c}\right| < \varepsilon$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n b_n}{c} = 0 \iff \frac{1}{c} \cdot \lim_{n\to+\infty} a_n b_n = 0$

$\iff \lim_{n\to+\infty} a_n b_n = 0$ $\lightning$

Esercizio   Provare che

1) $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \implies \lim_{n\to+\infty} |a_n| = |\ell|$

2) $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = \ell \;\not\Longrightarrow\; \lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$

3) $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0$ <u>se</u> $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

1) $\big|\,|a_n| - |\ell|\,\big| \le |a_n - \ell| \quad + \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$

$$\Downarrow$$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \bar{n} \; \forall n > \bar{n} \qquad \big|\,|a_n| - |\ell|\,\big| \le |a_n - \ell| < \varepsilon$

2) per provare $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = |\ell| \not\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$ devo produrre un controesempio

$$a_n = (-1)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n| = \lim_{n\to+\infty} |(-1)^n| = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1$$

però (vedi lezioni precedenti!)

$\nexists \lim_{n\to\infty} a_n$ infatti $\lim_{n\to+\infty} a_{2n} = 1$ mentre $\lim_{n\to+\infty} a_{2n+1} = -1$

3) $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \iff \lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \qquad |a_n| < \varepsilon \longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

$$\Updownarrow$$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \bar{n} \; \forall n > \bar{n} \qquad \big|\,|a_n| - 0\,\big| < \varepsilon$

$$\Updownarrow$$

$\lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0$

Esercizio

$$\lim_{n\to+\infty} x^n = \begin{cases} 0, & \text{se } 0\le x<1 \\ 1, & \text{se } x=1 \\ +\infty, & \text{se } 1<x \end{cases}$$

dim

•) $x>1$

Si usa il Teorema del confronto

$1+a$ è il punto medio tra 1 e x

$$a=\frac{x-1}{2} \qquad 1<1+a=1+\frac{x-1}{2}=\frac{1+x}{2}<x$$

$$x>1+a \implies x^n>(1+a)^n \qquad \forall n$$

Disuguaglianza Bernoulli $a>-1$

$$\implies \underbrace{x^n}_{a_n}>(1+a)^n \geq \underbrace{1+na}_{b_n} \qquad \forall n$$

inoltre $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+na) \geq \lim\limits_{n\to+\infty} n\cdot a=+\infty$

$$\implies \lim_{n\to+\infty} x^n=+\infty$$

Teorema del confronto

•) $x>1$ In tal caso $0\le \frac{1}{x}<1$

Limite rapporto = rapporto limiti

$$\lim_{n\to+\infty} x^n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^n}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^n}=\frac{1}{+\infty}=0^+$$

$\left(\frac{1}{x}\right)^n \longrightarrow +\infty$ vedi il caso precedente

Teorema (Criterio della radice)

Sia $\{a_n\}_n$ una successione reale t.c. $a_n \geq 0 \ \forall n$

Sia $\ell = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$

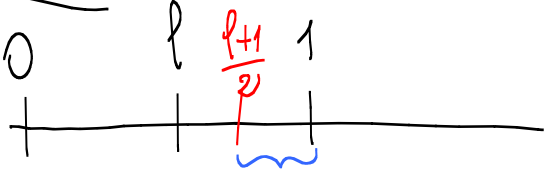
Allora

i) $0 \leq \ell < 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0^+$

ii) $\ell > 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

dim

i)



$\ell < \frac{\ell+1}{2} < 1$

$\varepsilon = 1 - \frac{\ell+1}{2} = \frac{1-\ell}{2}$

Per ipotesi

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n}_{\varepsilon} : \forall n > \bar{n} \quad \ell - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < \ell + \varepsilon$

$\Downarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} > 0 : \forall n > \bar{n} \quad 0 \leq \sqrt[n]{a_n} < \ell + \varepsilon$

$\Downarrow$

$\varepsilon = \frac{1-\ell}{2} \quad \exists \bar{n} > 0 \ \forall n > \bar{n} \quad 0 \leq \sqrt[n]{a_n} < \ell + \frac{1-\ell}{2} = \frac{1+\ell}{2}$

$\Downarrow$

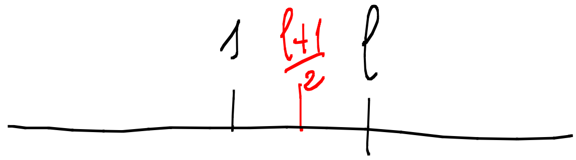
$\varepsilon = \frac{1-\ell}{2} \quad \exists \bar{n} > 0 \ \forall n > \bar{n} \quad 0 \leq a_n < \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n$

$\forall n > \bar{n} \quad 0 \leq a_n < \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n$

$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n = 0$ poiché $0 < \frac{1+\ell}{2} < 1$

$\Rightarrow$ per il Teorema del confronto $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

(ii)



$$\boxed{\ell > 1}$$

$$\varepsilon = \frac{\ell+1}{2} - 1 = \frac{\ell-1}{2}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} > 0 : \forall n > \bar{n} \qquad \ell - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < \ell + \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\varepsilon = \frac{\ell-1}{2} \ \exists \bar{n} \geq 0 \ \forall n > \bar{n} \qquad \frac{\ell+1}{2} = \ell - \frac{\ell-1}{2} < \sqrt[n]{a_n}$$

Dunque si ha

$$\forall n > \bar{n} \qquad \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^n < a_n$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^n = +\infty \quad \text{poiché} \quad \frac{\ell+1}{2} > 1$$

Per il Teorema confronto

$$\Longrightarrow \qquad \lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty \qquad \lightning$$

Esempio

$$a_n = q^n \qquad q \geq 0$$

$$\sqrt[n]{q^n} = q \xrightarrow[n \to +\infty]{} q \overset{\text{Criterio radice}}{\Longrightarrow} \begin{cases} 0 \leq q < 1 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} q^n = 0 \\ 1 < q \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty \end{cases}$$

Teorema (Criterio del rapporto)

Sia $\{a_n\}_n$ una successione reale $a_n > 0 \ \forall n$

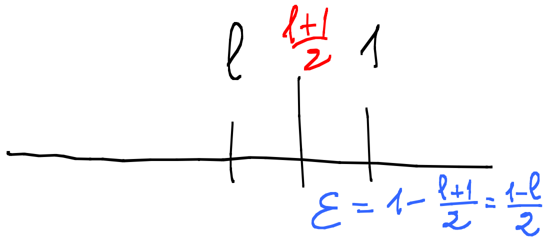
Sia $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$

Allora i) $0 \leq \ell < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$

ii) $1 < \ell \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

dim

$0 \leq \ell < 1$



$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \qquad \ell - \varepsilon < \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < \ell + \varepsilon$

$$\Downarrow$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \qquad 0 \leq \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < \ell + \varepsilon$

$\varepsilon = \dfrac{1-\ell}{2} \ \exists \bar{n} > 0 : \forall n > \bar{n} \qquad 0 \leq a_{n+1} < \left(\ell + \frac{1-\ell}{2}\right) a_n = \frac{1+\ell}{2} a_n$

dunque si ha $a_{\bar{n}+1} < \left(\dfrac{\ell+1}{2}\right) a_{\bar{n}}$

$$a_{\bar{n}+2} < \frac{\ell+1}{2} a_{\bar{n}+1} < \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^2 \cdot a_{\bar{n}}$$

$$a_{\bar{n}+3} < \left(\frac{\ell+1}{2}\right) a_{\bar{n}+2} < \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^3 a_{\bar{n}}$$

$$0 \leq a_{\bar{n}+4} < \cdots < \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^4 a_{\bar{n}}$$

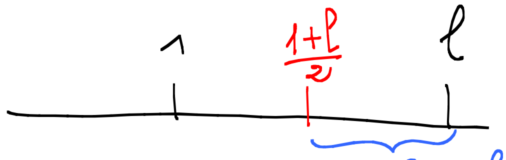
$$\cdots$$

$\forall n > \bar{n} \quad 0 \leq a_n < \left(\dfrac{\ell+1}{2}\right)^{n-\bar{n}} a_{\bar{n}} \qquad b_n = \left(\dfrac{\ell+1}{2}\right)^{n-\bar{n}} a_{\bar{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ etc.

da cui si deduce $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$

Viceversa

$1<\ell$



$\varepsilon = \ell - \frac{1+\ell}{2} = \frac{\ell-1}{2}$

$\forall\varepsilon>0 \ \exists \bar{n}>0 \ \forall n>\bar{n} \qquad \ell-\varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \ell+\varepsilon$

$\varepsilon=\frac{\ell-1}{2} \ \exists \bar{n}>0 \ \forall n>\bar{n} \qquad \ell-\frac{\ell-1}{2} < \frac{a_{n+1}}{a_n}$

$\forall n>\bar{n} \qquad a_n \cdot \frac{\ell+1}{2} < a_{n+1}$

$\Downarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \forall n>\bar{n} \quad b_n = a_{\bar{n}} \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n-\bar{n}} < a_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty \quad \frac{\ell+1}{2}>0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = \infty$$

<u>Teorema</u> $\{a_n\}$ succ. reale con $a_n>0 \ \forall n$

Se $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$ allora $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$ — Non si dimostra

NOTA BENE: il caso $\ell=1$ non si può decidere

<u>Esempio</u> Calcolare $\lim\limits_{n\to+\infty} n!$

<u>dim</u>

$a_n=n!$ si utilizza il criterio del rapporto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$$

criterio del rapporto

Esempio Calcolare $\lim_{n\to+\infty} n^n$

dim

Uso criterio della radice: $a_n = n^n$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^n} = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$$

Criterio Radice

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} n^n = +\infty$$

Def $f: A \to B$ si dice

monotone debolmente crescente se $\left[\forall x, y \in A \quad x < y \Rightarrow f(x) \le f(y) \right]$

" " decrescente se $\left[\forall x, y \quad x < y \Rightarrow f(x) \ge f(y) \right]$

(1) Def
$\{a_n\}_n$ è monotona debolmente decrescente (crescente).

se $\forall n > \bar{n} \qquad a_{\bar{n}} \ge a_n \quad (a_{\bar{n}} \le a_n)$

(2) Def $\{a_n\}_n$ è

monotona debolmente decrescente se $a_{n+1} \le a_n \ \forall n$

" " crescente se $a_{n+1} \ge a_n \ \forall n$

(1) $\Rightarrow$ (2) (basta prendere $n = \bar{n} + 1$)

(2) $\Rightarrow$ (1) infatti

$a_{n+1} \le a_n \ \forall n \Rightarrow \forall n > \bar{n} \quad a_n \le a_{\bar{n}}$

$a_{\bar{n}} \ge a_{\bar{n}+1} \ge a_{\bar{n}+2} \ge a_{\bar{n}+3} \ge \dots \ge a_n$

$n = \bar{n} + k$

$a_{\bar{n}} \ge a_{\bar{n}+1} \ge a_{\bar{n}+2} \ge \dots \ge a_{\bar{n}+k-1} \ge a_{\bar{n}+k} = a_n$

Teorema (limiti di funzioni vs limiti di successioni)

Sia $f: A \to \mathbb{R}$, x_0 p.d.a. per $A \subseteq \mathbb{R}$

Sono tra loro equivalenti le seguenti affermazioni

i) $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$

ii) $\forall \{x_n\} \subseteq A \setminus \{x_0\}$ $\quad \lim_{n \to +\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = l$

$(i) \overset{\text{dim}}{\Longrightarrow} (ii)$ per semplicità ci si limita a $x_0, l \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in A \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$ (Ipotesi)

Presa $\{x_n\} \subseteq A \setminus \{x_0\}$, $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x_0$, devo provare che

$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = l$.

Si osserva che $B = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq A$, inoltre

x_0 è p.d.a. per B

Teorema sui limiti delle restrizioni

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} f_{|B}(x) = l$$

$$\Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = l$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ si dimostra per assurdo

Si suppone che $x_0, l \in \mathbb{R}$

Se si nega la tesi, si deve negare il limite ovvero

$$\exists \varepsilon>0 : \forall \delta>0 \ \exists x_\delta \in A \ 0<|x_\delta - x_0|<\delta \quad e \quad |f(x_\delta)-\ell| \geq \varepsilon$$

$\Downarrow$

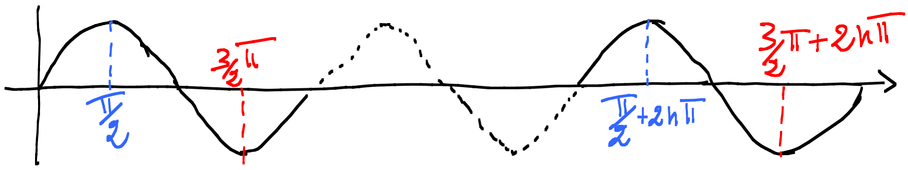
$$\exists \varepsilon>0 : \forall n>0 \ \exists x_n \in A : 0<|x_n - x_0|<\tfrac{1}{n} \quad e \quad |f(x_n)-\ell| \geq \varepsilon$$

$\Downarrow$

$$\exists \varepsilon>0 \ \exists x_n \neq x_0,\ x_n \in A \text{ t.c. } \lim_{n\to+\infty} x_n = x_0 \quad e \quad \lim_{n\to+\infty} f(x_n) \neq \ell$$

Esercizio: provare che $\nexists \lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x$

dim



$$x_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \qquad \lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \operatorname{sen} x_n = \lim_{n\to+\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right) = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1$$

$$y_n = \frac{3}{2}\pi + 2n\pi \qquad \lim_{n\to+\infty} y_n = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \operatorname{sen} y_n = \lim_{n\to+\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi + 2n\pi\right) = \lim_{n\to+\infty} -1 = -1$$

e quindi per il teorema precedente

$$\nexists \lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x$$

Teorema

$f: A \to \mathbb{R}$ $\quad x_0$ p.d.a. per A

sono equivalenti

(i) $\nexists \lim_{x \to x_0} f(x)$

(ii) non è vero $\left(\forall \{x_n\} \subseteq A \setminus \{x_0\} \quad x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_0 \Rightarrow f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \right)$

Oss $\left(A \Leftrightarrow B \right) \Leftrightarrow \left(\neg A \Leftrightarrow \neg B \right)$

Oss Questo Teorema serve a provare che $\nexists \lim_{x \to x_0} f(x)$

Successioni Monotone

Def $\{a_n\}_n$ successione reale monotona

a_n è strettamente crescente se $a_n < a_{n+1}$ $\forall n$

" " debolmente " " $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall n$

a_n è debolmente decrescente se $a_n \geq a_{n+1}$ $\forall n$

" " strettamente " " $a_n > a_{n+1}$ $\forall n$

Teorema (Le successioni monotone hanno limite)

Sia $\{a_n\}_n$ una succ. debolmente crescente (decrescente)

allora $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = \sup\{a_n : n\in\mathbb{N}\}$
$\left(= \inf\{a_n : n\in\mathbb{N}\}\right)$

dim

$\{a_n\}$ successione monotona decrescente debolmente

$\ell = \inf\{a_n : n\in\mathbb{N}\}$ ← Esiste sempre

$\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$

$\ell = -\infty$
$$\begin{cases} \forall M\in\mathbb{R}\ \exists \bar{n} : & a_{\bar{n}} < M \quad \leftarrow \ell=-\infty \\ \forall n>\bar{n} & a_n \leq a_{\bar{n}} \quad \leftarrow \{a_n\} \text{ è monotona decresc.} \end{cases}$$

$\forall M\in\mathbb{R}\ \exists \bar{n}>0 : \forall n>\bar{n}\ \ a_n \leq a_{\bar{n}} < M$

$\forall M\in\mathbb{R}\ \exists \bar{n}>0\ \forall n>\bar{n}\ \ a_n < M$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$$

- $l \in \mathbb{R}$ $\quad l = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

$$\begin{cases} \begin{cases} l \le a_n \quad \forall n \\ \forall \varepsilon>0 \ \exists \bar{n}>0 : \quad a_{\bar{n}} < l+\varepsilon \end{cases} \\ \forall n > \bar{n} \qquad a_n \le a_{\bar{n}} \end{cases}$$

$l = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

$a_n \downarrow$

ovvio $\quad l = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}\quad$ monotonia

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \bar{n}>0 : l-\varepsilon < l \le a_n \le a_{\bar{n}} < l+\varepsilon$$

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \bar{n}>0 : \quad l-\varepsilon < a_n < l+\varepsilon$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l$$

Oss Questo Teorema "sposta" il calcolo del limite al calcolo dell'estremo superiore

Fondamentale per la dim del Thm Bolzano Weierstrass

Teorema $\{a_n\}_n$ una successione reale

allora $\exists$ $\{a_{k_n}\}_n$ sottosuccessione monotona

Oss Risultato non scontato: si pensi a

$\{a_n\}_n = \{1, -\frac{1}{\pi}, 35, -\frac{1}{40}, 3\sqrt{2}, \dots\}$

come individuare una sottosuccessione monotona?

dim Si introduce l'insieme

$$A = \{n \in \mathbb{N} : a_n \le a_k \ \forall k > n\}$$

Abbiamo tre casi

① $A = \emptyset$ $\quad (\# A = 0)$

② A è finito $\quad (\# A = n \quad n < +\infty)$

③ A è infinito $\quad (\# A = +\infty)$

② A è finito : sia $N = \max A$

$$A = \{n : a_n \le a_k \quad \forall k > n\}$$

To!

Preso $k_1 = N$, $\exists k_2 > k_1$, $k_2 \notin A$, $a_{k_2} < a_{k_1}$ A è finito

Preso k_2, $\exists k_3 > k_2$, $k_3 \notin A$, $a_{k_3} < a_{k_2}$

----

preso k_n, $\exists k_{n+1} > k_n$, $k_{n+1} \notin A$, $a_{k_{n+1}} < a_{k_n}$

Ho costruito $\{a_{k_n}\}_n$ monotona strett. decrescente

① $A = \emptyset$ In tal caso, preso $N=1$, si ripete

la costruzione precedente

③ $A = \{n : a_n \leq a_k \quad \forall k > n\}$ è infinito

Principio minimo intero

essendo $A \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow \quad \exists M = \min A$

preso $k_1 = M$, $\exists k_2 \in A$, $M < k_2$ ovvero $a_{k_1} \leq a_{k_2}$

" $k_2 \in A$, $\exists k_3 \in A$, $k_2 < k_3$ " $a_{k_2} \leq a_{k_3}$

----

preso $k_n \in A$, $\exists k_{n+1} \in A$, $k_n < k_{n+1}$ " $a_{k_n} \leq a_{k_{n+1}}$

Si costruisce in tal modo una sottosuccessione

$\{a_{k_n}\}_n$ monotona debolmente crescente

Proviamo ora che l'successione limitata possiede una sottosuccessione convergente

Teorema (Bolzano-Weierstrass)

Data $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successione reale
Se $a \le a_n \le b \ \forall n\in\mathbb{N}$ allora $\exists \{a_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ t.c.

$$\lim_{n\to+\infty} a_{k_n} = \ell \in [a,b]$$

dim

Per il lemma precedente, esiste $\{a_{k_n}\}_n$ sottosuccessione monotona

- Essendo $\{a_{k_n}\}_n$ monotona, esiste $\lim_{n\to+\infty} a_{k_n} = \ell$

$$\text{dove } \ell = \begin{cases} \sup\{a_{k_n} : n\in\mathbb{N}\} & \text{se } a_{k_n} \nearrow^{=} \\ \inf\{a_{k_n} : n\in\mathbb{N}\} & \text{se } a_{k_n} \searrow^{=} \end{cases}$$

Per ipotesi $a \le a_n \le b \ \forall n \Rightarrow a \le a_{k_n} \le b \ \forall n$

$$\Rightarrow a \le \ell \le b$$

Dunque $\exists \{a_{k_n}\}_n$ sottosuccessione convergente a $\ell\in[a,b]$ $\lightning$

Teorema (Weierstrass)

$f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua

Allora $\boxed{\exists\, x_m \in [a,b] : \ f(x_m) = \min f([a,b])}$

$\exists\, x_M \in [a,b] \quad f(x_M) = \max f([a,b])$

dim -

$f([a,b]) \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow \exists \quad m = \inf f([a,b])$

m è punto di accumulazione per $f([a,b])$

$\Downarrow$

$\exists \{y_n\}_n \subseteq f([a,b]) \qquad y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} m$

$\Updownarrow$

$\exists \{x_n\}_n \subseteq [a,b] \qquad f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} m$

$\{x_n\} \subseteq [a,b]$ ovvero è limitato $\Rightarrow \exists \{x_{k_n}\}$

$x_{k_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \bar{x}$

continuità di f

$\lim_{n\to+\infty} f(x_{k_n}) = f\left(\lim_{n\to+\infty} x_{k_n}\right) = f(\bar{x})$

$f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} m \Rightarrow f(x_{k_n}) \to m \qquad \Rightarrow f(\bar{x}) = m$

se una succ. ha limite, tutte le sott. hanno = limite

Def (Successione di Cauchy)

$\{a_n\}_n$ si dice Successione di Cauchy se

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \forall n, m \geq \bar{n} \quad |a_n - a_m| < \varepsilon$

Teorema $\{a_n\}_n$ una successione reale

$\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$ sse $\{a_n\}_n$ è di Cauchy

dim

($\Rightarrow$) per ipotesi $\forall \varepsilon>0\ \exists \bar{n} : \forall n>\bar{n}\quad l-\varepsilon<a_n<l+\varepsilon$

dunque $\forall \varepsilon>0\ \exists \bar{n} : \forall m>\bar{n}\quad l-\varepsilon<a_m<l+\varepsilon$

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists \bar{n} : \forall m,n>\bar{n}\quad -2\varepsilon<a_n-a_m<2\varepsilon$

$\Rightarrow \{a_n\}$ è di Cauchy

($\Leftarrow$) Per ipotesi $\forall \varepsilon>0\ \exists \bar{n} : \forall n,m>\bar{n}\quad -\varepsilon<a_n-a_m<\varepsilon$

$\Downarrow$

$\varepsilon=1\quad \exists \bar{n} : \forall n,m>\bar{n}\quad a_m-1<a_n<a_m+1$

$\varepsilon=1\quad \exists \bar{n} : \forall n>\bar{n}\quad a_{\bar{n}+1}-1<a_n<a_{\bar{n}+1}+1$

ovvero $\{a_n\}_n$ è limitata

$\Downarrow$

Per il Thm Bolzano Weierstrass $\exists \{a_{k_n}\}_n$

$a_{k_n} \to l \in \mathbb{R}$

Ma $|a_n-l| = |a_n-a_{k_n}+a_{k_n}-l| \leq |a_n-a_{k_n}|+|a_{k_n}-l|$

Ma $\forall \varepsilon>0\ \exists \bar{n}\ \forall n>\bar{n}\quad k_n\geq n>\bar{n}\quad |a_n-a_{k_n}|<\varepsilon$

$\forall \varepsilon>0\ \exists \bar{n}\ \forall n>\bar{n}\quad |a_{k_n}-l|<\varepsilon$

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists \bar{n} : \forall n>\bar{n}\quad |a_n-l|<2\varepsilon$

Teorema (∃ successione di punti di A convergente a $\Lambda = \sup A$)

$\Lambda = \sup A$, $\Lambda \notin A \Rightarrow \exists \{x_n\}_n \subseteq A \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \Lambda$

dim

1) $\Lambda = +\infty \rightarrow \forall N > 0 \ \exists x_N \in A : N < x_N$

$\Rightarrow \lim_{N\to\infty} x_N = +\infty$.

2) $\Lambda \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} a < \Lambda & \forall a \in A \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{a} : \Lambda - \varepsilon < a \end{cases}$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \ \exists x_n \in A \quad \Lambda - 1/n < x_n < \Lambda$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \Lambda^-$

Teorema (di Weierstrass)

$f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua $\Rightarrow$ $\exists x_m \in [a,b] : f(x_m) = \min f([a,b])$
$\exists x_M \in [a,b] : f(x_M) = \max f([a,b])$

dim

$\Lambda = \sup f([a,b])$ supponiamo $\Lambda \notin f([a,b])$

Allora $\exists \{y_n\}_n \subseteq f([a,b]) \quad y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \Lambda$

Allora $\exists \{x_n\} \subseteq [a,b] \qquad f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Lambda$

Ma $a \leq x_n \leq b \Rightarrow \exists x_{k_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \bar{x}$

$\lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = f(\lim_{n\to\infty} x_{k_n}) = f(\bar{x})$ x la continuità di f

ma $\{f(x_{k_n})\}$ è un estratto di $y_n \Rightarrow f(x_{k_n}) \rightarrow \Lambda$

$\Rightarrow f(\bar{x}) = \Lambda = \max f([a,b])$

Analogamente per il minimo