Lezione 14 - Analisi I - Martedì 30 ottobre 2012

Titolo nota 25/10/2012

Esempio Sviluppare $\operatorname{sen}(\cos x - 1) = f(x)$ sino al 3° ordine in un intorno di $x_0 = 0$

$$f(x) = \operatorname{sen}(\cos x - 1) \qquad x \to 0$$

$f(x)$ continua su tutto $\mathbb{R}$ (composizione di f.ni continue)

$$f(0) = 0 \Rightarrow f = o(1) \quad x \to 0$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \Rightarrow \cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + o(x^3) \quad x \to 0$$

$$\operatorname{sen} y = y - \frac{y^3}{6} + o(y^3)$$

$$f(x) = \operatorname{sen}(\cos x - 1) = \left[-\frac{x^2}{2} + o(x^3)\right] - \underbrace{\frac{1}{6}\left[-\frac{x^2}{2} + o(x^3)\right]^3}_{-\frac{1}{6}\left[-\frac{x^6}{8} + \cancel{o(x^7)} + o(x^3) \cdot o(x^9)\right]} + o\left(\left[-\frac{x^2}{2} + o(x^3)\right]^3\right)$$

$$= -\frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(n) = a_n$

Teorema $\mathbb{R}$ non è numerabile

Def $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice numerabile

se $\exists\, \phi : \mathbb{N} \longrightarrow A$ biiettiva

Esempio $A = \{ 1/n \; : \; n \geq 1 \}$ A è numerabile

dim ($\mathbb{R}$ non è numerabile)

È suff $[0,1]$ non è numerabile

$$x \in [0,1] \iff x = 0{,}\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \cdots \alpha_n \cdots$$

$$= \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \frac{\alpha_3}{10^3} + \cdots + \frac{\alpha_n}{10^n} + \cdots$$

Se per assurdo $[0,1]$ fosse numerabile

$$x_1 = 0,\alpha_{11}\,\alpha_{12}\,\alpha_{13} \dots \alpha_{1n} \dots$$

$$x_2 = 0,\alpha_{21}\,\alpha_{22}\,\alpha_{23} \dots \alpha_{2n} \dots$$

$$x_3 = 0,\alpha_{31}\,\alpha_{32}\,\alpha_{33} \dots \alpha_{3n}$$

$$\dots$$

$$x_n = 0,\alpha_{n1}\,\alpha_{n2} \dots \alpha_{nn}$$

$$\alpha_{ij} \in \{0,\dots,9\}$$

$$\dots$$

$$\bar{\alpha}_{n,n} = \begin{cases} 1 & \alpha_{nn} \geq 5 \\ 5 & \alpha_{nn} < 5 \end{cases}$$

$$\bar{x} = 0,\bar{\alpha}_{11} \dots$$

$\bar{x} \notin$ alla lista

Quindi non si può numerare $[0,1]$ ↯

Successioni

Esempio $\{a_n\}_{n\geq 1} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\geq 1} = \underbrace{\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}}_{\text{elencazione}}$

$$\{n\in\mathbb{N} \quad n\geq 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto \frac{1}{n}$$

Esempio $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{1+(-1)^n}{2}\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \{1, 0, 1, 0, 1, 0, 1 \dots\}$

$$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad a_0 = \frac{1+(-1)^0}{2} = 1$$
$$n \longmapsto \frac{1+(-1)^n}{2} \qquad a_1 = \frac{1+(-1)}{2} = 0$$

Esempio $\boxed{\{a_n\}_{n\in\mathbb{P}} = \left\{\frac{1}{1+(-1)^n}\right\}_{n\in\mathbb{P}} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots\right\}}$

NON È UNA SUCCESSIONE
perché $n \in \mathbb{P}$

Esempio $a_n = \frac{1}{n}$ $\quad n = 1, 2, \dots$ $\quad \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\geq 1} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$

$$c_n := a_{3n-2} \qquad n \longmapsto 3n-2 \longmapsto a_{3n-2}$$

$$\{c_n\}_{n\geq 1} = \{a_{3n-2}\}_{n\geq 1} = \{a_1, a_4, a_7, a_{10}, \dots\}$$

è una successione $\quad \mathbb{N}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$
$$n \longmapsto c_n = a_{3n-2}$$

Def: Un sottoinsieme S di $\mathbb{N}$ è detto "semiretta" di $\mathbb{N}$ se $S = \{n\in\mathbb{N} : \underline{n \geq n_0}\} = \mathbb{N} \cap [n_0, +\infty[$

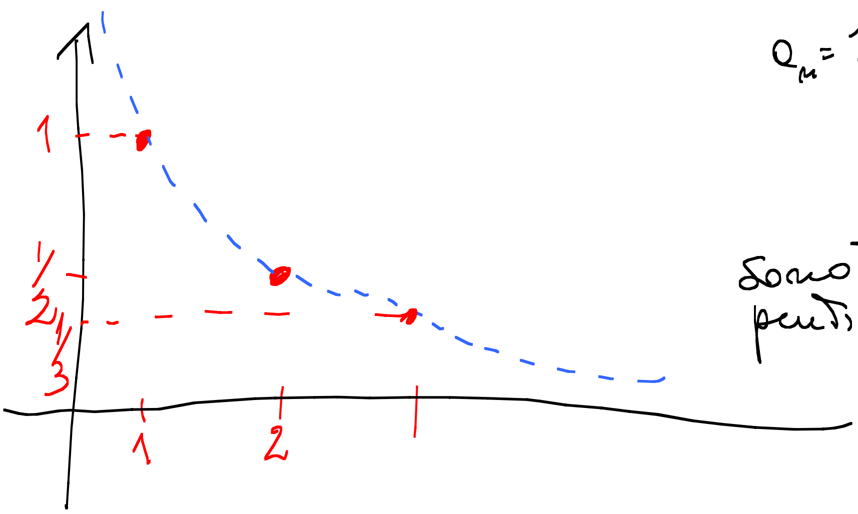
Esempio
- $\mathbb{N}$ è una semiretta
- $\{n \geq 100\} = \{100, 101, 102, \dots\}$ è una semiretta
- $\mathbb{P} = \{0, 1, 2, \dots\}$ NON è una semiretta

Def Si dice "successione di n.ri reali" una qualsiasi funzione $f: S \longrightarrow \mathbb{R}$ dove S è una semiretta di $\mathbb{N}$

ovvero $a_n = f(n)$ e si indica $\{a_n\}_{n \in S}$

$\{a_n\}_n \doteq \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

Rappresentazione grafica



$a_n = 1/n \quad \forall n \geq 1$

$\{1/n\}_{n \geq 1}$

Sono tanti punti isolati

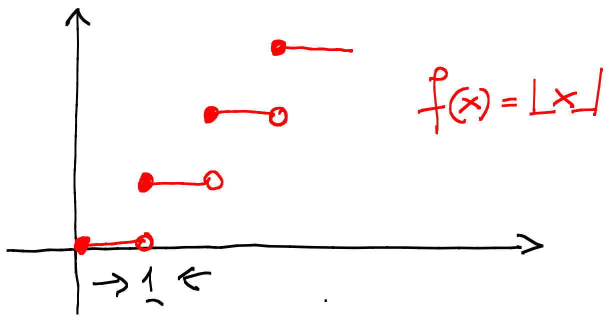
Osservazione : essendo una semiretta di $\mathbb{N}$ costituita di punti isolati, in questi punti la funzione è continua

ovvero

se riguardo $\{a_n\}_{n\in S}$ come una funzione questa è continua $\forall n\in S$

Def Si dice "parte intera" del n.ro $x\in[0,+\infty[$ il più grande intero minore o uguale a x

$$\lfloor x\rfloor = \max\{n\in\mathbb{N} : n\leq x\} \qquad x\geq 0$$



Oss : $f(x)=\lfloor x\rfloor$ è continua da destra ovvero $f(x_0)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)$

$3\leq 3{,}5<4 \qquad \lfloor 3{,}5\rfloor = 3$

Infatti $f(1)=\lim_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim_{x\to 1^-} f(x) = 0$!

Oss

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successione, $a_0\in\mathbb{R}$, $a_1\in\mathbb{R}$, $\dots$, $a_{1000}\in\mathbb{R}$

l'unica cosa "interessante" per l'analisi è il limite per $n\to+\infty$

$+\infty$ è l'unico punto di accumulazione per $\mathbb{N}$ (o per qualsiasi semiretta)

Quindi l'unico limite sensato per $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è $\lim_{n\to+\infty} a_n$

$a_n = f(n) \qquad \{a_n\}_{n\in S} \qquad S = \{n \in \mathbb{N} \;\; n \geq n_0\}$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

se

$$\forall U \in \mathcal{I}_l \;\; \exists V \in \mathcal{I}_{+\infty} : \forall n \in S \quad n \in V \Rightarrow a_n \in U$$

$$\forall U \in \mathcal{I}_l \;\; \exists M > 0 \; : \; \forall n \in S \quad n > [M]+1 \Rightarrow a_n \in U$$

$$\exists\,]M, +\infty[$$

$$S = \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$$

$$\forall U \in \mathcal{I}_l \;\; \exists M > 0 : \underbrace{\forall n \geq n_0 \qquad n > [M]+1}_{} \Rightarrow a_n \in U$$

$$\bar{n} = \max\{n_0, [M]+1\}$$

$$\boxed{\forall U \in \mathcal{I}_l \;\; \exists \bar{n} \quad \forall n > \bar{n} \quad a_n \in U}$$

Def $\{a_n\}_{n\in S}$ successione numeri reali

"a_n tende a $l \in \overline{\mathbb{R}}$ quando n tende a $+\infty$"

ovvero $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$

se

$$\forall U \in \mathcal{I}_l \;\; \exists \bar{n} > 0 \; : \; \forall n > \bar{n} \quad a_n \in U$$

Oss Questa è l'usuale definizione di limite, e quindi NON permette il calcolo del valore $l \in \mathbb{R}$, PERÒ permette, dato un l, di VERIFICARE se l sia o meno il corretto valore del limite

Esempio Verificare $\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

dim

$\Leftrightarrow$ suff. $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n}{n+1} - 1 \right) = \lim_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{n+1} \right) = 0$

$\Leftrightarrow$ suff. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} > 0 : \forall n \geq \bar{n} \quad \left| -\frac{1}{n+1} - 0 \right| < \varepsilon$

$\Updownarrow \qquad \Updownarrow \qquad \Updownarrow \qquad 0 \leq \frac{1}{n+1} < \varepsilon$

devo Trovare in corrispondenza a $\varepsilon > 0$ un $\bar{n} = \bar{n}(\varepsilon)$

Voglio

$\frac{1}{n+1} < \varepsilon$ se $n+1 > 1/\varepsilon$

se $n+\cancel{1} > \lfloor 1/\varepsilon \rfloor + \cancel{1}$ se $n > \lfloor 1/\varepsilon \rfloor$

$\boxed{\bar{n} = \lfloor 1/\varepsilon \rfloor}$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} = \lfloor 1/\varepsilon \rfloor : \forall n \geq \bar{n} \quad \frac{1}{n+1} < \varepsilon$ ✓

Teorema

$f: A \to \mathbb{R}$ $\quad B \subset A$ $\quad x_0$ p.d.a. per B (e per A)

Se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ allora $\exists \lim_{x \to x_0} f_{|B}(x) = \ell$

Esempio Calcolare $\lim_{n \to \infty} n \operatorname{sen} 1/n$

dim

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{y \to +\infty} \frac{\operatorname{sen} 1/y}{1/y}$$

Cambio variabili nei limiti

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} n \operatorname{sen} 1/n = 1$$

$+\infty$ è punto di accumulazione per $\mathbb{R}$ e per $\mathbb{N}$!! dunque si può passare alla restrizione

Esempio Calcolare $\lim_{n \to +\infty} n^2 \left(1 - \cos 1/n\right)$

dim

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = 1/2 \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{1 - \cos x}{x^2} = 1/2$$

$$\underset{y = 1/x}{\Rightarrow} \lim_{y \to +\infty} \frac{1 - \cos 1/y}{1/y^2} = 1/2 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} n^2\left(1 - \cos \frac{1}{n}\right) = 1/2$$

Thm cambiamento di variabili

limite della restrizione non cambia

Esempio Calcolare $\lim_{n \to +\infty} n \left(e^{1/n} - 1\right)$

dim

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{e^{1/n} - 1}{1/n} \qquad 1/n \to 0$$

devo ricordarlo

$$\boxed{\lim_{y \to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1}$$

$$1 = \lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y} = \lim_{y \to 0^+} \frac{e^y-1}{y} \underset{y = 1/x}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{1/x}-1}{1/x}$$

il dominio di questa f.ne ha $+\infty$ come punto di accumulazione

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{1/n}-1}{1/n}$$

$+\infty$ è ancora punto di accumulazione

$$f :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{e^{1/x}-1}{1/x}$$

$$f|_{\{n\geq 1\}} : \{n \geq 1\} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(n) = \frac{e^{1/n}-1}{1/n}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{n\to+\infty} f|_{\{n\geq 1\}} = \lim_{n\to+\infty} a_n$$

<u>Oss</u> Il limite se esiste è unico (Vale per le successioni)

<u>Oss</u> limite di una somma = somma dei limiti

" " " prodotto = prodotto " "

" " un quoziente = quoziente " "

fatta eccezione per $+\infty - \infty$! , $0 \cdot \infty$! , $\frac{\infty}{\infty}$! e $\frac{0}{0}$! } cose da escludere

Esempio Calcolare (se esiste) $\lim_{n\to+\infty} (-1)^n$

dim

$\{a_n\}_n = \{1, -1, 1, -1, \dots\}$

Proviamo che $\nexists$ il limite, ovvero $\forall \ell \in \mathbb{R}$.

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \bar{n} \quad \exists n : \quad |a_n - \ell| \geq \varepsilon$$

Negazione della def di limite ℓ

•) Se $\ell \neq \pm 1$ allora $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq \ell$

$$\bar{\varepsilon} = \min\{|\ell - 1|, |\ell + 1|\}$$

$$\forall \bar{n} \quad \exists n : |a_n - \ell| = |(-1)^n - \ell| = \begin{cases} |1-\ell| \geq \varepsilon & n \text{ pari} \\ |-1-\ell| = |1+\ell| \geq \varepsilon & n \text{ dispari} \end{cases}$$

• $\ell = 1 \qquad \varepsilon = 1/2$

$\varepsilon = \frac{1}{2} \quad \forall \bar{n} : \exists n : \quad |a_n - 1| = |(-1)^n - 1| \geq \frac{1}{2}$ ← devo provare

$\varepsilon = \frac{1}{2} \quad \forall \bar{n} : \exists n = 2\bar{n}+1 \quad |a_{2\bar{n}+1} - 1| = |(-1)^{2\bar{n}+1} - 1| = |-2| \geq \frac{1}{2}$

• $\ell = -1$

$\varepsilon = \frac{1}{2} \; \forall \bar{n} : \exists n = 2\bar{n} : |a_{2\bar{n}} + 1| = |(-1)^{2\bar{n}} + 1| = |2| \geq \frac{1}{2}$

dunque $\forall \ell \quad \lim_{n\to+\infty} a_n \neq \ell \Rightarrow \nexists \lim_{n\to+\infty} a_n$

Lemma $K: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strettamente crescente

allora $K(n) \geq n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Oss questo lemma è FALSO se si prende

$f(x) = \operatorname{arctg} x$ che è strettamente crescente

però $\operatorname{arctg} x \leq x \quad \forall x \geq 0$

dim

$K: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strettamente crescente, ovvero
$K(n) < K(n+1) \quad \forall n$ $\Big\}$ $(*)$

Procedo per induzione • $K(0) \geq 0$ VERO!

• Suppongo che $K(n) \geq n$ (ipotesi induttiva)

devo provare $K(n+1) \geq n+1$.

$K(n+1) \overset{K \nearrow}{>} K(n) \overset{\text{Hip. Induttive}}{\geq} n \Rightarrow K(n+1) \geq n+1$ $\lightning$

Oss il lemma continua a valere se $k : S \to S'$ strett. crescente su S semiretta

Def $\{a_n\}_{n \in S'}$ successione reale e $k : S \to S'$ strett. crescente, diciamo che

$$\{a_{k_n}\}_{n \in S} := \{a_{k(n)}\}_{n \in S}$$

è una "sottosuccessione" (o succ. estratta)

Esempio

$$\{a_n\}_{n \geq 1} \doteq \{(-1)^n \cdot 1/n\}_{n \geq 1} = \{-1, 1/2, -1/3, 1/4, \dots\}$$

$$\{b_n\}_{n \geq 1} = \{a_{2n}\}_{n \geq 1} = \left\{\frac{1}{2n}\right\}_{n \geq 1} = \{1/2, 1/4, 1/6, \dots\}$$

$$\{c_n\}_{n \geq 1} = \{a_{2n-1}\}_{n \geq 1} = \left\{-\frac{1}{2n-1}\right\}_{n \geq 1} = \{-1, -1/3, -1/5, \dots\}$$

$b_n = a_{k(n)}$ $\quad k(n) = 2n \quad k : \{n \geq 1\} \to \{n \geq 1\}$

k strett. crescente

$c_n = a_{h(n)}$ $\quad h(n) = 2n-1 \quad h : \{n \geq 1\} \to \{n \geq 1\}$

h strett. crescente

Teorema

$\{a_n\}_{n\in S}$ successione reale $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$

allora $\forall k: S\to S$ strettamente crescente

si ha $\lim_{n\to+\infty} a_{k_n} = l$

dim

$l\in\bar{\mathbb{R}}$

Hp. $\forall \varepsilon>0\ \exists \bar{n}: \forall n>\bar{n}\quad |a_n - l|<\varepsilon$

$\to k(n)\geq n\quad \forall n\in\mathbb{N}$

$\forall\varepsilon>0\ \exists\bar{n}: \forall n>\bar{n}\quad k(n)\geq\bar{n}\quad |a_{k_n}-l|<\varepsilon$

$\quad "\quad "\quad : \forall n>\bar{n}\ |a_{k_n}-l|<\varepsilon$

$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} a_{k_n} = l$

$A\Rightarrow B$ se $\neg B\Rightarrow\neg A$

Teorema (contronominale del precedente)

se $\exists\{a_{k_n}\}_n$ e $\{a_{h_n}\}_n$ due sottosuccessioni

T.c. $\lim_{n\to+\infty} a_{k_n} = l \neq m = \lim_{n\to+\infty} a_{h_n}$

allora $\nexists \lim_{n\to+\infty} a_n$

<u>Esempio</u> $\{(-1)^n\}_n = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$b_n = a_{2n} = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

$\cancel{\neq} \Rightarrow \nexists \lim_{n\to+\infty} a_n$ ↯

$c_n = a_{2n+1} = -1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$

<u>Pb</u> Se avete $a_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ $a_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$?

allora $a_n \to \ell$.

<u>Risposta</u>: Sì, poiché $\{a_{2n}\}_n \cup \{a_{2n+1}\}_n = \{a_n\}_n$

Pb: Se $\{a_{4n}\}_n$ $a_{4n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$?

$\{a_{6n}\}_n$ $a_{6n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$

allora posso concludere $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ <u>No</u>

Per esempio $a_{4n} = 1 \ \forall n$ $a_{6n} = 1 \ \forall n$

$$\{1, \overset{2}{1}, \overset{3}{\tfrac{1}{2}}, \tfrac{1}{3}, \overset{4}{1}, \overset{5}{\tfrac{1}{5}}, \overset{6}{1}, \overset{7}{\tfrac{1}{7}}, \overset{8}{1}, \dots\} = a_n$$

ovvero $a_n = 1/n \quad \forall n \neq 4k \quad \forall n \neq 6k$

In tal caso si ha $a_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

e quindi la successione non converge ↯

Esempio $\{a_n\} = \left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}_{n\geq 1}$

$\{b_n\}_n = \{a_{2n}\}_{n\geq 1}$ $\qquad b_n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0^+$

$\{c_n\} = \{a_{2n-1}\}_{n\geq 1}$ $\qquad c_n = -\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0^-$

per il Teorema che segue

$\Rightarrow a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$c_1 = a_1$ $\qquad c_2 = a_3$

$\left\{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots\right\}$

$b_1 = a_2$

Questo suggerisce che se ho due estratte che convergono allo stesso limite e l'unione delle estratte mi dà tutta la successione di partenza, allora la successione intera converge allo stesso limite!

Teorema

$\{a_n\}$ a successione reale.

$\exists\ k, h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strettamente crescenti

e 1) $k(\mathbb{N}) \cup h(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$ $\Leftarrow \{a_n\}_n = \{a_{k_n}\}_n \cup \{a_{h_n}\}_n$

e 2) $\lim_{n\to+\infty} a_{k_n} = \lim_{n\to\infty} a_{h_n} = l$

allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$

dim (facoltativa)

Supponiamo $l \in \mathbb{R}$

Tesi $\forall \varepsilon>0\ \exists \bar{n} : \forall n>\bar{n}\quad l-\varepsilon < a_n < l+\varepsilon$

Hip. $\begin{cases} \forall \varepsilon>0\ \exists n_1 : \forall n>n_1 & l-\varepsilon < a_{k_n} < l+\varepsilon \\ \quad '' \quad \exists n_2 : \forall n>n_2 & l-\varepsilon < a_{h_n} < l+\varepsilon \end{cases}$

$\bar{n} = \max\{k_{n_1}, h_{n_2}\}$ essendo $h(\mathbb{N}) \cup k(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$

$\forall n>\bar{n}\quad n \in h(\mathbb{N}) \cup k(\mathbb{N})$

$\forall \varepsilon>0\ \exists \bar{n} : \forall n>\bar{n}$ ① ②

① $\exists m : n = k_m > \bar{n} \geq k_{n_1} \Rightarrow m > n_1 \Rightarrow l-\varepsilon < a_{k_m} = a_n < l+\varepsilon$

② $\exists s : n = h_s > \bar{n} \geq h_{n_2} \Rightarrow s > n_2 \Rightarrow l-\varepsilon < a_{h_s} = a_n < l+\varepsilon$

e riassumendo

$\forall \varepsilon>0\ \exists \bar{n}>0 : \forall n>\bar{n}\quad l-\varepsilon < a_n < l+\varepsilon$ ↯

Esempio

$$a_n = \begin{cases} 1-\frac{4}{n} & \text{se } n \text{ è pari} \\ 1+\frac{10}{n} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

$a_{2n} = 1-\frac{4}{2n} \to 0^-\qquad a_{2n+1} = 1+\frac{10}{2n+1} \to 0^+ \Rightarrow a_n \to 0$!

I seguenti risultati valgono per i limiti di successioni

- Se il limite esiste allora è unico.

- Il limite di una somma, di un prodotto, di un rapporto è uguale alla somma, al prodotto, al rapporto dei limiti (fatta eccezione per le forme indeterminate $+\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, $\frac{\infty}{\infty}$ e ricordando che non si divide per 0!)

- Teorema della permanenza del segno:
  Se $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n > 0$ allora $\exists \bar{n}$: $a_n > 0$ $\forall n > \bar{n}$

- Se $a_n \xrightarrow[n]{} L \in \mathbb{R}$ allora $|a_n| \le C$ $\forall n$.

- Vale il teorema seguente

Teorema (del confronto)

Date due successioni $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$

$\rightarrow a_n \le b_n$ $\forall n$

•) Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = m$ $\lim_{n\to+\infty} b_n = \ell$ allora $\ell \le m$

•) Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ allora $\exists \lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$

•) Se $\lim_{n\to+\infty} b_n = -\infty$ allora $\exists \lim_{n\to+\infty} b_n = -\infty$

dim

vedere le dimostrazioni fatte nel caso di funzioni $f: A \to \mathbb{R}$!

Teorema (dei due carabinieri)

Date $\{a_n\}_n$ $\{b_n\}_n$ $\{c_n\}_n$ successioni reali t.c.

1) $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \ell \in \underline{\underline{\mathbb{R}}}$

2) $a_n \le b_n \le c_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

allora $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \ell$

dim

$$\begin{cases} \forall \varepsilon>0 \ \exists \bar n_1>0 : \forall n>\bar n_1 & \ell-\varepsilon < a_n < \ell+\varepsilon \\ \quad '' \quad \exists \bar n_2>0 : \forall n>\bar n_2 & \ell-\varepsilon < c_n < \ell+\varepsilon \\ \qquad\qquad \forall n & a_n \le b_n \le c_n \end{cases}$$

$\bar n = \max\{\bar n_1, \bar n_2\}$

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \bar n>0 : \forall n>\bar n \quad \begin{cases} \ell-\varepsilon < a_n < \ell+\varepsilon \\ \ell-\varepsilon < c_n < \ell+\varepsilon \\ a_n \le b_n \le c_n \end{cases}$$

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \bar n>0 : \forall n>\bar n \quad \ell-\varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < \ell+\varepsilon$$

$$\quad '' \qquad '' \qquad\qquad '' \qquad\qquad \ell-\varepsilon < b_n < \ell+\varepsilon$$

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \ell$$

↯

Teorema (limitato × infinitesimo = infinitesimo)

Date $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$ tali che

1) $\exists \lim_{n \to +\infty} a_n = 0$
2) $\exists c \in \mathbb{R}$ t.c. $|b_n| \leq c \quad \forall n$

Allora $\lim_{n \to +\infty} a_n \cdot b_n = 0$

<u>dim</u>

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \quad -\varepsilon < a_n < \varepsilon$

$\forall n \quad |b_n| \leq c$

$X - 3 = 5$

<u>me</u>

$x = 8$

$\Downarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \quad -c \cdot \varepsilon < a_n b_n < c \cdot \varepsilon$

$\Downarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \quad -\varepsilon < \frac{a_n b_n}{c} < \varepsilon$

$\Downarrow$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n b_n}{c} = 0$$

$\Downarrow$

$$\frac{1}{c} \lim_{n \to +\infty} a_n b_n = 0$$

<u>Esercizio</u> Provare che

1) $\lim_{n \to +\infty} a_n = l \implies \lim_{n \to +\infty} |a_n| = |l|$

2) $\lim_{n \to +\infty} |a_n| = l \not\Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = l$

3) $\lim_{n \to +\infty} |a_n| = 0$ <u>me</u> $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$

Esercizio

$$\lim_{n\to+\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad 0 \le x < 1 \\ +\infty & \text{se} \quad 1 < x \end{cases}$$

dim

Proviamo $\lim_{n\to+\infty} x^n = +\infty$ se $x > 1$

$x > 1 \Rightarrow x = 1 + a$ con $a > 0 \Rightarrow x^n = (1+a)^n \geq 1 + na \ \forall n$
per la disuguaglianza di Bernoulli

Ma $\lim_{n\to+\infty}(1+na) = +\infty$, e allora $\lim_{n\to+\infty} x^n = +\infty$

Viceversa, se $x < 1$ allora $\frac{1}{x} > 1$

allora $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{x^n} = +\infty$ allora $\lim_{n\to+\infty} x^n = 0^+$