Lezione 14 - Analisi Matematica 1 - 30 ottobre 2012

Titolo nota 12/10/2012

- $f = o(1)$ $g = o(1)$ $x \to x_0$ "$f = o(g)$ $x \to x_0$"
  - se $\exists \lambda = o(1)$: $f(x) = \lambda(x) g(x)$ $x \to x_0$
  - se $(g \neq 0)$ $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

- $\operatorname{sen} x - x = o(x)$ $1 - \cos x - \frac{x^2}{2} = o(x^2)$ $x \to 0$

Algebra degli o-piccolo

- $o(x^\alpha) = k\, o(x^\alpha)$ $\forall \alpha > 0$ $\forall k \neq 0$ $x \to 0$
- $o(o(x^\alpha)) = o(x^\alpha)$ " $x \to 0$
- $x^\alpha \cdot o(x^\beta) = o(x^{\alpha+\beta})$ $\forall \alpha, \beta > 0$ $x \to 0$
- $o(x^\alpha)\, o(x^\beta) = o(x^{\alpha+\beta})$ " $x \to 0$
- $o(x^\alpha) + o(x^{\alpha+\beta}) = o(x^\alpha)$ " $x \to 0$
- $o(x^\alpha + o(x^\alpha)) = o(x^\alpha)$ $\forall \alpha > 0$ $x \to 0$
- $\frac{o(x^{\alpha+\beta})}{x^\alpha} = o(x^\beta)$ $\forall \alpha, \beta > 0$ $x \to 0$
- $\frac{f + o(f)}{g + o(g)}$ si comporta come $\frac{f}{g}$ quando $x \to x_0$

Con la notazione "o-piccolo" voglio calcolare $\forall$ limite!!!

Trasformare $\forall$ limite in un limite di polinomi, somme polinomi, prodotto di polinomi o quoziente di polinomi!

$\operatorname{sen} x - x = o(x)$ $x \to 0$ $\Rightarrow$ $\operatorname{sen} x = x + o(x)$ $x \to 0$

$1 - \cos x - \frac{x^2}{2} = o(x^2)$ $x \to 0$ $\Rightarrow$ $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ $x \to 0$

$\sqrt{2}$ = numero con sviluppo decimale illimitato e non periodico

Numeri con sviluppo decimale finito $\longrightarrow \mathbb{Q}$

" " " " periodico $\longrightarrow \mathbb{Q}$

$\sqrt{2} = 1,41\ldots$

$1,41 + (\text{Termini di ordine inferiore}) = \sqrt{2}$

Esempio $f(x) = x^3 + 3x^5 - 2x^6$

Affermo che, quando $x \to 0$

$f(x) = x^3 + 3x^5 + o(x^5)$ ho perso informazioni

$f(x) = x^3 + o(x^4)$

$f(x) = x^3 + o(x^3)$

$\sqrt{2} = 1,4 + (\qquad)$

$= 1 + (\qquad)$

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ sse $\lim_{x\to 0} \left(\frac{e^x-1}{x} - 1\right) = 0$

sse $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x} = 0$

sse $e^x - 1 - x = o(x)$ $x \to 0$

sse $e^x = \overbrace{1 + x} + o(x)$ $x \to 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1 \quad \underline{\text{sse}} \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{\log(1+x)}{x}-1\right)=0$$

$$\underline{\text{sse}} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x}{x}=0 \quad \underline{\text{sse}} \quad \log(1+x)-x=o(x) \quad x\to 0$$

$$\underline{\text{sse}} \quad \log(1+x)=x+o(x) \quad x\to 0$$

$$\operatorname{sen}x = x+o(x) \quad x\to 0$$

$$\begin{cases} \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}x}{x}-1\right)=0 \\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x-x}{x}=0 \\ \operatorname{sen}x-x=o(x) \quad x\to 0 \end{cases}$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+o(x^2) \quad x\to 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x-\frac{x^2}{2}}{x^2}=0$$

$$1-\cos x-\frac{x^2}{2}=o(x^2) \quad x\to 0$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+o(x^2) \quad x\to 0$$

Def $f, g : A \to \mathbb{R}$ $\quad \underline{\underline{x_0}}$ p.d.a. per A

$f = o(1)$ e $g = o(1)$ (oppure $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$)

si dice "f asintoticamente equivalente a g per $x \to x_0$"

e si scrive $f \sim g \quad x \to x_0$

se $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f}{g} = K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

__Esempio__ 1) $f(x) = \operatorname{sen} x \sim x = g(x)$ per $x \to 0$

2) $f(x) = (x^3 + 3x) \sim x^3 + x^2 = g(x)$ per $x \to +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f}{g} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 + 3x}{x^3 + x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}} \cdot \frac{1 + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}}$$

$$= 1$$

infatti

$$\frac{3}{x^2} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

$$\frac{1}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + o(1)}{1 + o(1)} = 1$$

Def $f : A \to \mathbb{R}$ $\quad x_0$ p.d.a. per A $\quad f = o(1) \quad x \to x_0$

Se $\exists \alpha > 0, a \in \mathbb{R}$ t.c.

$$f(x) = a|x - x_0|^\alpha + o(|x - x|^\alpha), \quad x \to x_0$$

$\alpha \equiv$ ordine di infinitesimo di f per $x \to x_0$

$a|x - x_0|^\alpha$ = parte principale dell'infinitesimo $f(x)$ per $x \to x_0$

Esempio Calcolare ordine e p.p. per $x \to 0$ dell'infinitesimo $f(x) = 1-\cos x$

dim

$$1-\cos x - \frac{x^2}{2} = o(x^2) \quad x \to 0 \implies 1-\cos x = \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad x\to 0$$

$\alpha = 2$: ordine di infinitesimo di $f = (1-\cos x)$ per $x \to 0$

$x^2/2$: parte principale di $(1-\cos x)$ per $x \to 0$

Anticipo Sviluppi Taylor $\to$ Sviluppi f.ni elementari $\boxed{x \to 0}$

$$\operatorname{sen} x = x + o(x) \leftarrow \text{lo conosco}$$

funzione dispari

$$= x + o(x^2) \leftarrow \text{NUOVO!}$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$$

compaiono solo potenze grado dispari

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^8)$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$$

Oss Si utilizzano i termini che servono

(ci si arresta a un certo valore di n!)

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad x \to 0 \quad |||$$

$$\cos x = 1 + o(1)$$ ← Questo è ovvio

$$= 1 + o(x) \quad (x \to 0)$$

funzione pari

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$$ ← Sono note!

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3)$$ ← questo è NUOVO

← Nello sviluppo compaiono solo le potenze grado pari!!

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$$

...

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + \boxed{(-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{(2n)!}} + o(x^{2n+1})$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!}} + o(x^{2n+1})$$

$$\boxed{x \to 0}$$

Esercizio: Calcolare ordine e parte principale per $x \to 0$ di

$$f(x) = (\operatorname{sen} x - x \cos x)$$

dim

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x = x + o(x^2) \\ \cos x = 1 + o(x) \end{cases}$$

$$f(x) = \operatorname{sen} x - x\cos x = x + o(x^2) - x\left(1 + o(x)\right)$$

$$= \cancel{x} + o(x^2) - \cancel{x} + o(x^2)$$

$$= o(x^2)$$

Non mi basta: ho preso "pochi" termini dello sviluppo, e quindi ho "poche" informazioni

Devo prendere qualche termine in più!

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3)$$

$$f(x) = \operatorname{sen} x - x\cos x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) - x\left(1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3)\right)$$

$$= \cancel{x} - \frac{x^3}{6} + o(x^4) - \cancel{x} + \frac{x^3}{2} + o(x^4)$$

$$= \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$ ← adesso ho l'informazione desiderata!!!

$\alpha = 3$ ordine di infinitesimo

$\frac{x^3}{3}$ = parte principale

$$\operatorname{Tg}(x) = x + o(x^2)$$

dispari

$$= x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

potenze dispari

$$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6) \qquad x \to 0$$

Oss lo sviluppo di $\operatorname{Tg} x$ non è regolare, ovvero non ho la formula per il termine grado n

dispari $\qquad$ potenze di grado dispari

$$\operatorname{arctg} x = x + o(x^2)$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6)$$

$$-\,-$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \dots + \boxed{(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}} + o(x^{2n+2})$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}) \quad x \to 0$$

$(x \to 0)$

$$e^x = 1 + o(1) \leftarrow \text{è OVVIO}$$

$$= 1 + x + o(x) \leftarrow \text{è NOTO} \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2) \leftarrow \text{è NUOVO}$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$= \dots$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \qquad , x \to 0$$

<u>Oss</u> : $f(x) = e^x$ non è né pari né dispari, e compaiono tutte le potenze nello sviluppo (sia di grado pari che di grado dispari)

Osservazione (esponenziale complesso)

Si può definire l'esponenziale "complesso"

$$e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

$$e^{iy} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(iy)^k}{k!} + o(y^n)$$

$$= 1 + \frac{(iy)}{1!} + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!}$$

$$+ \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \frac{(iy)^6}{6!} + \frac{(iy)^7}{7!} + \dots$$

$$= 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!}$$

$$+ \frac{y^4}{4!} + i\frac{y^5}{5!} - \frac{y^6}{6!} - i\frac{y^7}{7!} + \dots$$

$$= 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \frac{y^8}{8!} + \dots$$

$$+ i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \dots\right)$$

$$= \cos y + i \operatorname{sen} y$$

↯

$$\log(1+x) = x + o(x) \leftarrow \text{è NOTO} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \leftarrow \text{è NUOVO}$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

$$= \dots$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) \qquad x \to 0$$

Oss $\log x$ non è né pari né dispari (come e^x!) e si ha che il suo sviluppo contiene tutte le potenze di x, sia pari che dispari

Oss NON TUTTI gli infinitesimi hanno un ordine

Esistono infinitesimi non confrontabili con x^α, per $x \to 0$, $\forall \alpha > 0$

Per esempio $f(x) = \frac{1}{\log x} = o(1)$ per $x \to 0$

ma $x^\alpha = o\left(\frac{1}{\log x}\right)$ $\forall \alpha > 0$ $x \to 0$

Infatti $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha}{1/\log x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{1/x^\alpha} =$

Hopital

$$\overset{\text{Hopital}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{-\alpha} \cdot x^\alpha = 0 \quad \forall \alpha > 0$$

Esercizio

Calcolare lo sviluppo di $(1+x)^\alpha$ $x \to 0$

dim

$$a^x \doteq e^{x \log a}$$

Definizione di potenza a esponente reale $(a > 0)$

$$(1+x)^\alpha \doteq e^{\alpha \log(1+x)}$$

$$e^{y} = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3!} + o(y^3)$$

$$\alpha \log(1+x) = \alpha\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)$$

$$e^{\alpha\log(1+x)} = 1 + \left[\alpha\log(1+x)\right] + \frac{\left[\alpha\log(1+x)\right]^2}{2!} + \frac{\left[\alpha\log(1+x)\right]^3}{3!} + o\left(\left[\alpha\log(1+x)\right]^3\right)$$

$$= 1 + \left[\alpha x - \alpha\frac{x^2}{2} + \alpha\frac{x^3}{3} + o(x^3)\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\alpha x - \alpha\frac{x^2}{2} + \alpha\frac{x^3}{3} + o(x^3)\right]^2 \leftarrow \text{resta solo } \frac{1}{2}\left[\alpha^2x^2 - \alpha^2x^3\right]$$

$$+ \frac{1}{6}\left[\alpha x - \alpha\frac{x^2}{2} + \alpha\frac{x^3}{3} + o(x^3)\right]^3 \leftarrow \text{resta solo } \frac{1}{6}\left[\alpha^3x^3\right]$$

$$+ o\left(\left[\alpha x - \alpha\frac{x^2}{2} + \alpha\frac{x^3}{3} + o(x^3)\right]^3\right)$$

$$= 1 + \alpha x - \alpha\frac{x^2}{2} + \alpha\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\left[\alpha^2x^2 - \alpha^2x^3\right] + \frac{\alpha^3x^3}{6} + o(x^3)$$

$$= 1 + \alpha x + \frac{x^2}{2}\alpha(\alpha-1) + \frac{x^3}{6}\left[+2\alpha - 3\alpha^2 + \alpha^3\right] + o(x^3)$$

$$= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}\cdot x^3 + o(x^3)$$

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}x^4+o(x^4)$$
$$= \text{-----}$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}\cdot x^k+o(x^n)$$

Esercizio Calcolare approssimativamente

$$\sqrt{65}=(65)^{1/2}=(64+1)^{1/2}=$$
$$=8\left(1+\tfrac{1}{64}\right)^{1/2}=8\Big[1+\underset{\alpha}{\left(\tfrac{1}{2}\right)}\cdot\underset{x}{\tfrac{1}{64}}$$
$$+\left(\tfrac{1}{2}\right)\left(+\tfrac{1}{2}\right)\left(-\tfrac{1}{2}\right)\cdot\left(\tfrac{1}{64}\right)^2$$

Non ha significato $\longrightarrow$ $+o\left(\left(\frac{1}{64}\right)^2\right)\Big]$

$$=8\left[1+\frac{1}{128}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2^{12}}+\text{---}\right]$$
$$=8\left[1+\frac{1}{2^7}-\frac{1}{2^{15}}+\text{---}\right]$$

$8\cdot\left(1+\frac{1}{2^7}\right)$ ottengo una buona approx.

(Anche se non so quantificarlo esattamente!)

Esercizio Calcolare lo sviluppo di $\frac{1}{1-x}$

(ovvero $(1-x)^\alpha$ con $\alpha = -1$!)

$$\frac{1}{1-x} = [1+(-x)]^{-1}$$

$$= 1 + \alpha(-x) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}(-x)^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}(-x)^3$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}(-x)^4 + o(x^4)$$

$$= 1 + (-1)(-x) + \frac{(-1)(-2)}{2}x^2 + \frac{(-1)(-2)(-3)}{3!}(-1)x^3$$

$$+ \frac{(-1)(-2)(-3)(-4)}{4!}x^4 + o(x^4)$$

$$= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + o(x^4)$$

e, in generale,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n)$$

$$\overset{!}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n) \qquad x \to 0$$

Cambio di base per i logaritmi ($\forall a, b > 0$)

$$\boxed{\log_a x} = \log_a \left[b^{\log_b x} \right] = \boxed{\log_b x \cdot \log_a b}$$