

Lezione 12 - Analisi Matematica 1 - 25 ottobre 2012

Titolo nota

15/10/2012

Le funzioni elementari (polinomi, funzioni trigonometriche, funzione esponenziale) sono continue

Il teorema algebrico mi permette di costruire somme, differenze, prodotti e rapporti di funzioni continue ottenendo ancora funzioni continue

Adesso voglio provare la continuità della composizione di funzioni continue, che è lo strumento più utilizzato per provare la continuità.

$$f: A \rightarrow \mathbb{R} \quad g: B \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)) \quad \text{quando lo sono?}$$

$$x \mapsto f(x) \mapsto g(f(x))$$

È necessario che

$$\boxed{f(A) \cap B \neq \emptyset}$$

Dire che $f(A) \cap B \neq \emptyset$ equivale a dire che

$$S = f^{-1}(f(A) \cap B) \neq \emptyset$$

Teorema (continuità della funzione composta)

$$f: A \rightarrow \mathbb{R}, g: B \rightarrow \mathbb{R} \text{ t.c. } \boxed{f^{-1}(f(A) \cap B) = \Omega \neq \emptyset}$$

Si suppone f continua in $x_0 \in \Omega$ e g continua in $y_0 = f(x_0)$
Allora

$$\underline{(g \circ f) \text{ è continua in } x_0} \text{ e si ha } (g \circ f)(x_0) = g(f(x_0)) = g(y_0)$$

$$\textcircled{1} \forall \varepsilon > 0 \xrightarrow{\text{dim}} \exists \rho > 0 : \forall y \in B \quad |y - y_0| < \rho \Rightarrow |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon.$$

continuità di g

" " f

$\xrightarrow{\text{dim}} (g \circ f)$

$$\textcircled{2} \forall \rho > 0 \xrightarrow{\text{dim}} \exists \delta > 0 : \forall x \in \Omega \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \rho.$$

$$\begin{aligned} x \in \Omega = f^{-1}(f(A) \cap B) &\Rightarrow f(x) \in f[f^{-1}(f(A) \cap B)] = f(A) \cap B \\ &\Rightarrow f(x) \in B \end{aligned}$$

Osservazione

$$\textcircled{2} \forall \rho > 0 \exists \delta = \delta(\rho, x_0) : \forall x \in \Omega \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow \begin{cases} |f(x) - y_0| < \rho \\ f(x) \in B \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \forall \varepsilon > 0 \exists \rho = \rho(\varepsilon, y_0) : \forall y \in B \quad |y - y_0| < \rho \Rightarrow |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$$

$\Downarrow$

$\downarrow f(x_0)$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \rho = \rho(\varepsilon, y_0) \exists \delta = \delta(\rho, x_0) = \delta(\varepsilon, x_0, y_0) : \forall x \in \Omega \quad |x - x_0| < \delta$$

vedi
Osservazione

$$\Rightarrow \begin{cases} |f(x) - y_0| < \rho \\ f(x) \in B \end{cases} \Rightarrow |g(f(x)) - g(y_0)| < \varepsilon$$

$\Downarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon) : \forall x \in \Omega \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$$



Esempio $f(x) = 4 - x^2$ è continua $\forall x \in \mathbb{R}$
 $g(y) = \sqrt{y}$ " " $\forall y \geq 0$

allora $(g \circ f)(x)$ è continua $\forall x \in \Omega = f^{-1}(f(\mathbb{R}) \cap [0, +\infty))$
 $= [-2, 2]$

In fatti $f(\mathbb{R}) =]-\infty, 4]$ $f(\mathbb{R}) \cap [0, +\infty[= [0, 4]$
 e quindi $f^{-1}([0, 4]) = [-2, 2] = \Omega$

Combinamento di variabile nei limiti

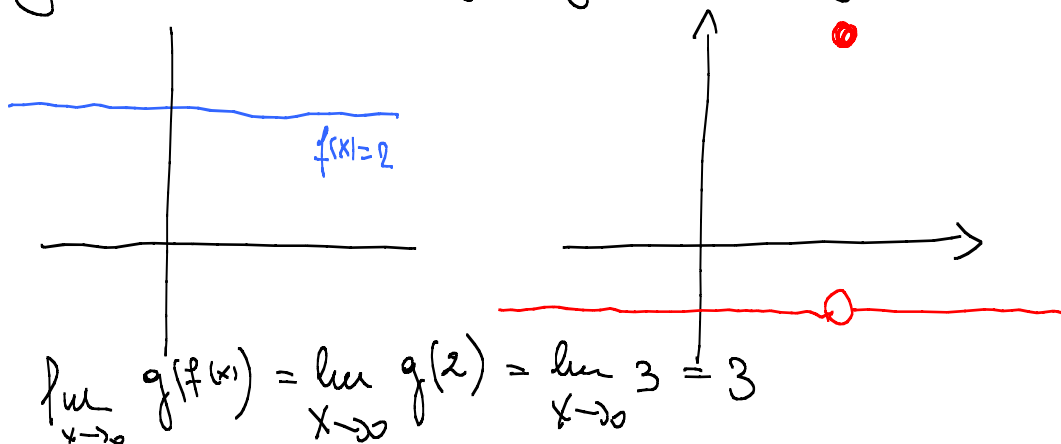
Problema: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(1 - \cos x)}{1 - \cos x} \stackrel{y = 1 - \cos x}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y}$
 dato che $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) = 0$?

Va fatta attenzione: questo passaggio è spesso lecito, tranne che per alcune eccezioni

Controesempio (non si può cambiare variabile in questo caso)

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = 2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $g(y) = \begin{cases} -1 & \forall y \neq 2 \\ 3 & y = 2 \end{cases} \Rightarrow \lim_{y \rightarrow 2} g(y) = -1$



$$\lim_{y \rightarrow 2} g(y) = -1$$

ma attenzione $g(f(x)) = g(2) = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) = 3$

però $\lim_{y \rightarrow 2} g(y) = -1$

ovvero in questo caso $\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) \neq \lim_{y \rightarrow 2} g(y)$ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$

Teorema (Cambiamento di variabile nei limiti)

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 p.d.e. per $\Omega = f^{-1}(f(A) \cap B)$

$g: B \rightarrow \mathbb{R}$, y_0 p.d.e. per $f(A) \cap B$

1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$

2) $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = l$

Se vale una delle seguenti ipotesi

a) $\exists W \in \mathcal{I}_{x_0} : f(x) \neq y_0 \ \forall x \in (\Omega \setminus \{x_0\}) \cap W$

b) g continua in y_0

allora $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = l$

NON SI FA LA DIMOSTRAZIONE

Esempio

Calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(1 - \cos x)}{(1 - \cos x)}$

$$\frac{\sin(1 - \cos(0))}{1 - \cos(0)} = \frac{\sin(0)}{0} = \frac{0}{0} \text{ forma indet.}$$

Osserva che $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$

Osserva che $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) = 0$

$f(x) = 1 - \cos x$ f è continua in $x_0 = 0$

$g(y) = \frac{\sin y}{y}$ g non è definita in $y=0$
 $\lim_{y \rightarrow 0} g(y) = 1$

$\tilde{g}(y) = \begin{cases} \frac{\sin y}{y} & y \neq 0 \\ 1 & y = 0 \end{cases}$ $\tilde{g}$ è continua in $y=0$

$f(x) = 1 - \cos x$ f continua in $x_0 = 0$
 $\tilde{g}(y) = \begin{cases} g(y) & y \neq 0 \\ 1 & y = 0 \end{cases}$ $\tilde{g}$ " " $y_0 = 0$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (\tilde{g} \circ f)(x) = \lim_{y \rightarrow 0} \tilde{g}(y) = \lim_{y \rightarrow 0} g(y)$
 $\parallel$
 1

Esempio (non posso sempre cambiare variabile nei limiti!)

$$f(x) = 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$g(y) = \begin{cases} -1 & y \neq 2 \\ 3 & y = 2 \end{cases}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2) = 3$$

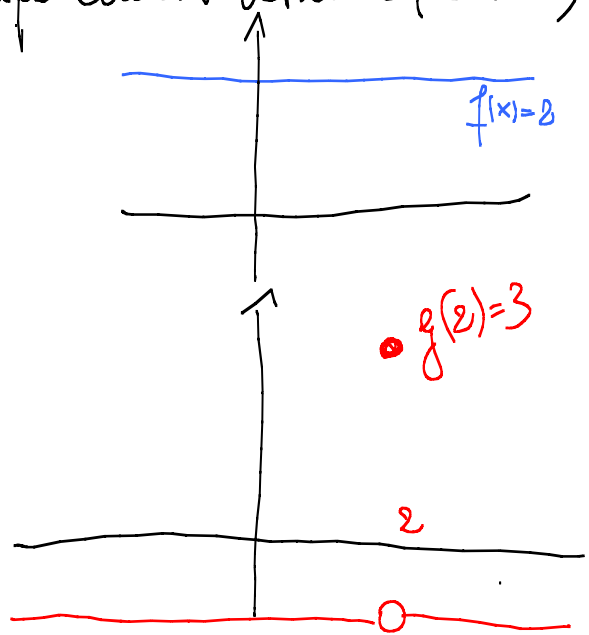
$x \rightarrow 0 \downarrow$

$$3 = \lim_{x \rightarrow 0} (g \circ f)(x)$$

~~Non è~~

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$$

$$\lim_{y \rightarrow 2} g(y) = -1$$



• g non è continua

•

? $\exists w \in \mathcal{J}_0 : f(x) \neq 2 \quad \forall x \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cap U$?

Non è verificata
poiché
 $f(x) = 2$ e
tappeto

Esempio

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2+4x)}{x^2+2x} = 2$$

dim

$$f(x) = 2x^2+4x$$

$$g(y) = \frac{\sin y}{y} = 2 \frac{\sin y}{y}$$

Questa funzione si può estendere con continuità in $y=0$

come

$$\tilde{g}(y) = \begin{cases} 2 \frac{\sin y}{y} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

$$\text{Dunque } \lim_{x \rightarrow 0} (2x^2+4x) = 0$$

$\tilde{g}$ è continua in $y=0$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{\sin(2x^2+4x)}{2x^2+4x} = \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ (y=2x^2+4x)}} 2 \frac{\sin y}{y} = 2$$

e siamo autorizzati a fare il cambio variabili poiché $\tilde{g}$ è continua in $y=0$!

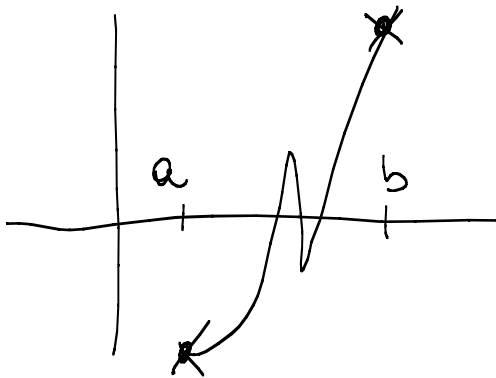
FUNZIONI CONTINUE SU UN INTERVALLO

Teorema (di Bolzano o di esistenza degli zeri)

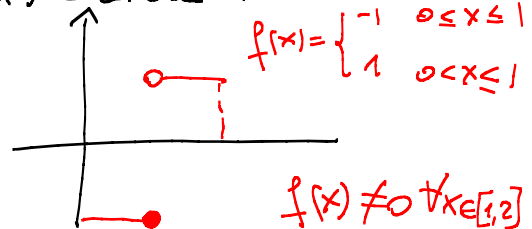
$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continua su } [a, b]$$

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

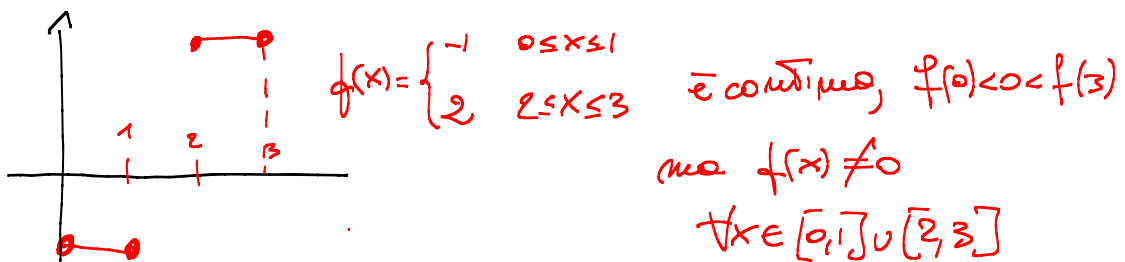
Allora $\exists z \in]a, b[: f(z) = 0$



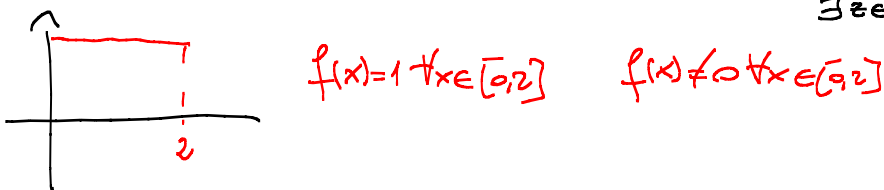
Dom 1 Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : f(a) \cdot f(b) < 0$ allora non è detto che $\exists z : f(z) = 0$



Dom 2 Se $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ continua $f(a) < 0 < f(b)$ allora non è detto che $\exists z : f(z) = 0$



Dom 3 Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua allora non è detto $\exists z \in]a, b[: f(z) = 0$



dim

Supponiamo $f(a) < 0 < f(b)$

$$A = \{x \in [a, b] : f(x) < 0\}$$

$$\boxed{z = \sup A} \quad z \in [a, b]$$

$$\textcircled{1} f(z) < 0$$

$$f(z) : \textcircled{2} f(z) = 0 \quad \leftarrow \text{Questa \u00e8 la tesi che voglio provare}$$

$$\textcircled{3} f(z) > 0$$

Proviamo che $\textcircled{1}$ porta ad un assurdo
 $\textcircled{3}$ " " " "

$$\textcircled{1} f(z) < 0 \quad f \text{ continua in } z$$

$$\Rightarrow (\text{Thm permonenza segno}) \exists]z-\delta, z+\delta[\text{ t.c.}$$

$$f(x) < 0 \quad \forall x \in]z-\delta, z+\delta[\cap [a, b]$$

$$\Rightarrow \forall x \in [z, z+\delta[\cap [a, b] \quad f(x) < 0$$

$$\Rightarrow [z, z+\delta[\cap [a, b] \subseteq A = \{x \in [a, b] : f(x) < 0\}$$

$$\Rightarrow \sup A > z \quad \text{Assurdo}$$

③ $f(z) > 0$ f continuous in z

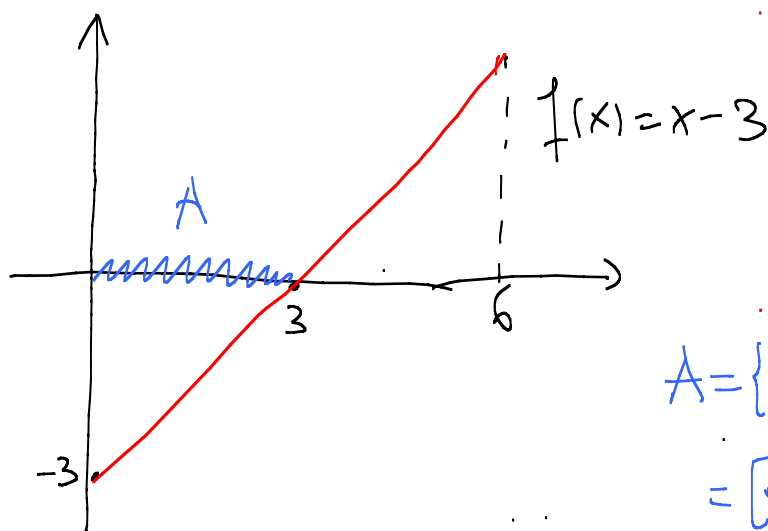
$\Rightarrow$ (the permanence property) $\exists]z-\delta, z+\delta[\in]z$

t.c. $f(x) > 0 \quad \forall x \in]z-\delta, z+\delta[\cap [a, b]$

$\Rightarrow f(x) > 0 \quad \forall x \in]z-\delta, z] \cap [a, b]$

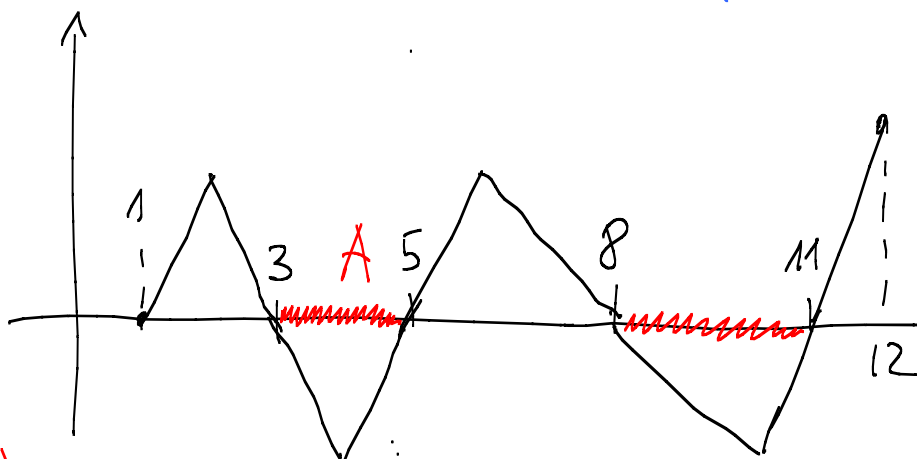
$\Rightarrow (]z-\delta, z] \cap [a, b]) \cap A = \{x: f(x) < 0\} = \emptyset$

$\Rightarrow \sup A < z$ A bounded $\downarrow$



$$A = \{x \in [0, 6]: f(x) < 0\} \\ = [0, 3[$$

$$3 = \sup A$$



$$A = \{x \in [1, 12]: f(x) < 0\} = [3, 5] \cup [8, 11] \quad 11 = \sup A$$

Esercizio (Utilizzando il metodo di bisezione)

Calcolare approssimativamente le radici REALI di

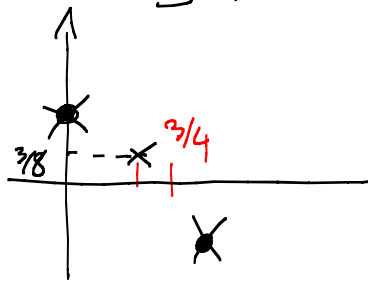
$$x^3 - 3x^2 + 1 = 0$$

dim

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1 \quad f(0) = 1 > 0 > f(1) = -1$$

Per il Teorema di Bolzano

$$\exists z \in]0, 1[\text{ t.c. } f(z) = 0$$



$$m = \frac{1}{2} = \frac{0+1}{2}$$

$$OK \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} - \frac{3}{4} + 1 = \frac{1-6+8}{8} = \frac{3}{8}$$

Per il Teorema di Bolzano $\exists z \in]\frac{1}{2}, 1[: f(z) = 0$

$$m = \frac{\frac{1}{2} + 1}{2} = \frac{3}{4} \quad f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{27}{64} - \frac{27}{16} + 1 = \frac{27-108+64}{64} < 0$$

Per il Teorema di Bolzano $\exists z \in]\frac{1}{2}, \frac{3}{4}[$

$$m = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}}{2} = \frac{5}{8} \quad \text{mi va a calcolare } f\left(\frac{5}{8}\right) = \frac{125}{512} - \frac{600}{512} + 1$$

e mi ha $f\left(\frac{5}{8}\right) > 0$

Per il Teorema di Bolzano $\exists z \in]\frac{5}{8}, \frac{3}{4}[$

La radice si può approssimare con la precisione

che si desidera

Naturalmente ci sono pure le altre radici:

$$f(-1) = -1 - 3 + 1 < 0 < f(0) \Rightarrow \text{in }]-1, 0[\text{ c'è una seconda radice reale}$$

$$f(1) = -1 < 0 < 1 = f(3) \Rightarrow \text{in }]1, 3[\text{ c'è una terza radice reale}$$

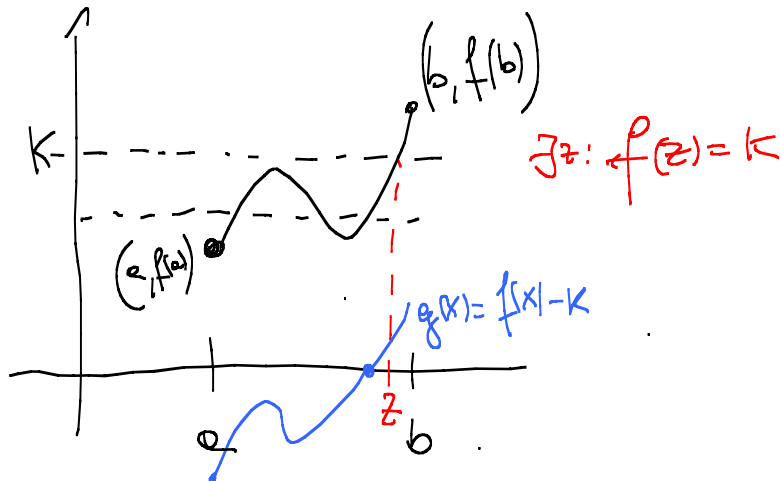
Abbiamo visto una applicazione del

Metodo di Bisezione

Corollario (del Teorema di Bolzano)

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, con $f(a) < f(b)$ ($f(a) > f(b)$)

Allora $\forall k: f(a) < k < f(b) \quad \exists z \in]a, b[: k = f(z)$



dim Voglio ricondurre al Teorema di Bolzano

$$g(x) = f(x) - k$$

- $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua
- $g(a) = f(a) - k < 0 < f(b) - k = g(b)$

Vale xipoten

$$\Rightarrow (\text{Thm Bolzano}) \quad \exists z \in]a, b[: g(z) = 0$$

$$\Rightarrow \exists z \in]a, b[: f(z) - k = 0$$

$$\Rightarrow \exists z \in]a, b[: f(z) = k$$

Def: $I \subseteq \mathbb{R}$ si dice "intervallo" se

$\rightarrow \forall x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$, $\{x \in \mathbb{R} : x_1 \leq x \leq x_2\} \subseteq I$

$\rightarrow \forall x_1, x_2 \in I$ " $x_1 < x_2$ $[x_1, x_2] \subseteq I$

Esempio $]3, 4[$ è un intervallo

Esempio $]3, 4[\cap \mathbb{Q}$ non è un intervallo

$3 < \sqrt{10} < 4$ ma $\sqrt{10} \notin]3, 4[\cap \mathbb{Q}$

Teorema (dei valori intermedi)

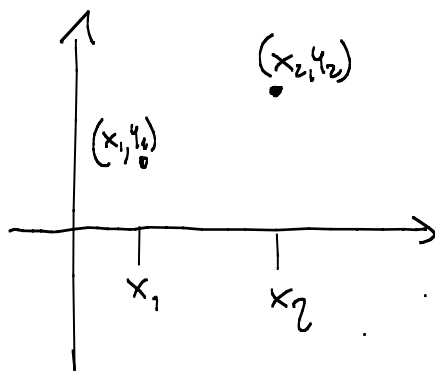
Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continua $\forall x \in I$ I intervallo
allora $f(I)$ è un intervallo

Dims Bisogna provare che
 $\forall y_1, y_2 \in f(I), y_1 < y_2$, si ha $[y_1, y_2] \subseteq f(I)$

$$y_1, y_2 \in f(I) \Rightarrow \exists x_1, x_2 \in I : f(x_1) = y_1 \quad f(x_2) = y_2$$

Essendo $y_1 \neq y_2 \Rightarrow x_1 \neq x_2$ (poiché f è una funzione)

Supponiamo $x_1 < x_2$ e $y_1 = f(x_1) < f(x_2) = y_2$
(non è restrittivo)



$f: [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$ continua

$$f(x_1) < f(x_2)$$

$$f(x_1) < K < f(x_2)$$

$\Downarrow$ (Corollario Bolzano)

$$\exists z \in]x_1, x_2[: f(z) = K$$

$$\Rightarrow \forall K \in]y_1, y_2[\quad \exists z \in]x_1, x_2[: f(z) = K$$

$$\Rightarrow]y_1, y_2[\subseteq f(I)$$



Corollario (del teorema dei valori intermedi)

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continua $\forall x \in I$ I intervallo

allora $f(I) \subseteq [\inf f(I), \sup f(I)]$

$\uparrow$ intervallo $\uparrow$ nel caso in cui $-\infty$ non è aperto a min $\uparrow$ se $+\infty$ non è aperto a destra

Teorema (di Weierstrass)

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua $\forall x \in [a, b]$ chiuso e limitato

allora $\exists x_m \in [a, b] : f(x_m) = \min f([a, b])$

$x_M \in [a, b] : f(x_M) = \max f([a, b])$

dim

Primo passo: $\exists c > 0$ t.c. $|f(x)| \leq c \forall x \in [a, b]$

Per assurdo f non è limitata $\Rightarrow \sup f([a, b]) = +\infty$

• $m_1 = \frac{a+b}{2}$ f è illimitata su $[a, m_1]$ o su $[m_1, b]$

Suppongo f illimitata su $[a, m_1]$ e pongo $a_1 = a$ $b_1 = m_1$

• $m_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$ f è illimitata su $[a_1, m_2]$ o su $[m_2, b_1]$

Suppongo f illimitata su $[m_2, b_1]$ e pongo $a_2 = m_2$ $b_2 = b_1$

.....

$$\begin{cases} a \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq b_n \leq \dots \leq b \\ b_n = a_n + \frac{b-a}{2^n} \\ f \text{ illimitata su } [a_i, b_i] \quad i=1, \dots, n \end{cases} \quad (\text{valga per } n)$$

• $m_n = \frac{a_n+b_n}{2}$ f illimitata su $[a_n, m_n]$ o su $[m_n, b_n]$

Suppongo f illimitata su $[a_n, m_n]$ pongo $a_{n+1} = a_n$ e $b_{n+1} = m_n$

In tal modo f è illimitata su $[a_n, b_n] \forall n$, e
$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$$

$$z = \sup a_n$$

Essendo f continua in $z \Rightarrow f$ è localmente limitata

ovvero $\exists U \in \mathcal{I}_z \exists c > 0$

$$|f(x)| \leq c \quad \forall x \in U \cap [a, b]$$

Preso n.t.c. $[a_n, b_n] \subset U \cap [a, b]$, si trova che
 f è limitata su $[a_n, b_n]$ assurdo

Ne segue la tesi

Seconda Parte : $\exists \min f([a, b]) \max f([a, b])$

Dalla prima parte si sa che $|f(x)| \leq c \quad \forall x \in [a, b]$

$$\Rightarrow \lambda = \sup f([a, b]) \in \mathbb{R} \quad \lambda = \inf f([a, b]) \in \mathbb{R}$$

Proviamo che $\lambda = \max f([a, b])$

Per assurdo $f(x) < \lambda \quad \forall x \in [a, b]$

Allora $g(x) = \frac{1}{\lambda - f(x)}$ è continua su $[a, b]$, dunque

g è limitata su $[a, b]$ ovvero

$$|g(x)| \leq c \quad \forall x \in [a, b]$$

ovvero

$$\frac{1}{\lambda - f(x)} \leq c \quad \forall x \in [a, b]$$

$$\forall x \in [a, b]$$

ovvero $\lambda - f(x) \geq \frac{1}{c}$ ovvero $f(x) \leq \lambda - \frac{1}{c}$

che è assurdo ($\lambda = \sup f([a, b])$)

Ne segue $f(x) = \lambda$ per $x \in [a, b]$



Teorema (funzioni monotone e limiti)

Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua
 $\forall x \in I$, dove I è un intervallo

f monotona su I

Allora $\forall x_0 \in I \quad \exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$

N.B. se x_0 è un estremo, esisterà uno solo di questi
limiti

dim
Supponiamo f debolmente crescente, ovvero

$$\forall x, y \in I \quad x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

Sia $I =]a, b[$ e proviamo $\exists \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$

Sia $\lambda = \sup f(]a, b[)$, che esiste poiché

$$f(]a, b[) \subseteq \mathbb{R} !!$$

$$\text{Terzi} \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \lambda = \sup f(]a, b[)$$

$$\textcircled{1} \lambda = \sup f(]a, b[) \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} f(x) \leq \lambda \quad \forall x \in]a, b[\\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{x} \in]a, b[: \quad \lambda - \varepsilon < f(\bar{x}) \end{cases}$$

$$\overset{e}{\bar{x} < x} \Rightarrow f(\bar{x}) \leq f(x)$$

$$\text{Ponendo } \delta = b - \bar{x}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) \leq 1 \quad \forall x \in]a, b[\\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : b - \delta < x < b \Rightarrow 1 - \varepsilon < f(x) \leq f(x) \end{array} \right.$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : b - \delta < x < b \Rightarrow 1 - \varepsilon < f(x) \leq 1$$

e questo significa $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = 1$

② $L = +\infty$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall M \in \mathbb{R} \quad \exists \bar{x} \in]a, b[: M < f(\bar{x}) \\ \bar{x} < x \Rightarrow f(\bar{x}) < f(x) \end{array} \right.$$

$$\Downarrow \quad \delta = b - \bar{x}$$

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 : b - \delta < x < b \Rightarrow M < f(x) \leq f(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 : b - \delta < x < b \Rightarrow M < f(x)$$

e questo significa $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty$ ↙