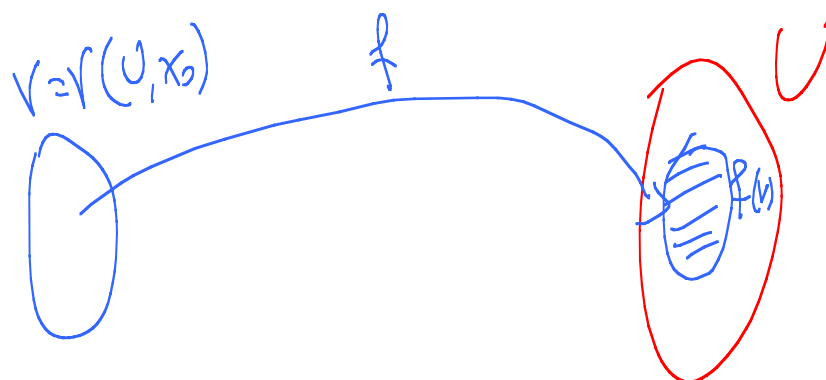


Def $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, " f è continua in x_0 "

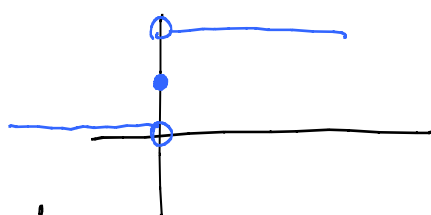
o.e. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0 : \forall x \in A \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$\forall U \in \mathcal{I}_{f(x_0)} \exists V \in \mathcal{I}_{x_0} : \forall x \in A \quad x \in V \Rightarrow f(x) \in U$



Esempio di funzione continua $f(x) = x$

" " " discontinua in $x_0 = 0$



$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/2 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

Def

" f è continua in $x_0 \in A$ da destra" $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ o.e.

$\forall U \in \mathcal{I}_{f(x_0)} \exists V \in \mathcal{I}_{x_0} : \forall x \in A \quad x \in U \cap]x_0, +\infty[\Rightarrow f(x) \in V$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0 : \forall x \in A \quad x \in]x_0, x_0 + \delta[$

$$\Downarrow \\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Def

$f(x_0)$ "f continua da sinistra in $x_0 \in A$ " $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in A \quad x \in]x_0 - \delta, x_0[$

$$\Downarrow \\ f(x) \in]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$$

Esercizio

Provare che $h(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$ è continua da sinistra in x_0

dim

interno sinistro
di $x_0 = 0$

$$]h(0) = 0$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$$

$$x \in]-\delta, 0[\Rightarrow h(x) \in]-\varepsilon, \varepsilon[$$

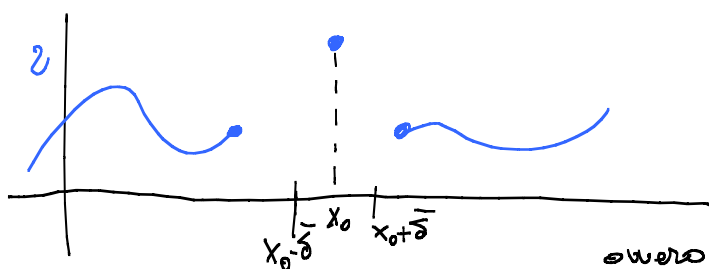
osserva che $\forall x \in]-\delta, 0[\quad f(x) = 0 \in]-\varepsilon, \varepsilon[$

Esempio

Provare che $h(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$ è continua da destra in x_0

Om

$f: A \rightarrow \mathbb{R} \quad x_0 \in A \quad x_0$ isolato allora f è continua in x_0



$f: A \rightarrow \mathbb{R}$

x_0 punto isolato
per $A, x_0 \in A$

osserva $\exists \delta > 0$ t.c.

$$]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap A = \{x_0\}$$

dimu

Dato provare

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0 : \forall x \in A \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

x_0 è isolato, dunque

$$\exists \bar{\delta} > 0 : \quad]x_0 - \bar{\delta}, x_0 + \bar{\delta}[\cap A = \{x_0\}$$

Prendo $\delta < \bar{\delta}$, tutto funziona in fatti (prendiamo $\delta = \frac{\bar{\delta}}{2}$)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \frac{\bar{\delta}}{2} : \forall x \in A \quad x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\Rightarrow x = x_0 \Rightarrow$$
$$f(x) = f(x_0) \in]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$$

$\Leftarrow$

Qm In un suo punto isolato, una funzione è
sempre continua

quindi

i punti isolati non sono interessanti per la
continuità !!!

Esercizio $f(x) = x$ è continua $\forall x \in \mathbb{R}$
 dim

fissato x_0 , bisogna provare che
 $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \varepsilon$

preso $\delta(\varepsilon, x_0) = \varepsilon$ ci ha la tesi $\checkmark$

Esercizio : $f(x) = |x|$ è continua $\forall x \in \mathbb{R}$

dim

da provare che $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

basta prendere $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) = \varepsilon$ e ci ha la tesi
 ricordando che $| |x| - |x_0| | < |x - x_0|$

$$x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$$

$$\forall x, x_0 \quad | |x| - |x_0| | < |x - x_0|$$

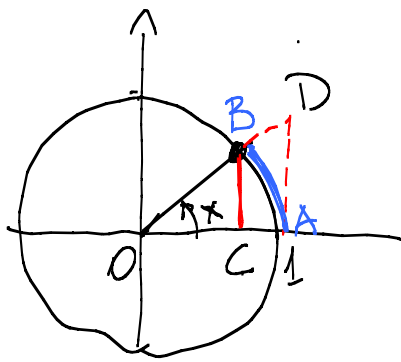
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$\quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \Rightarrow |x| - |x_0| < \varepsilon$$

$$\delta = \varepsilon \quad | |x| - |x_0| | < |x - x_0| < \delta = \varepsilon$$

$\uparrow$ tesi. $\uparrow$ assunto

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \varepsilon > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow ||x| - |x_0|| < \varepsilon$$



$x \equiv$ lunghezza dell'arco $\overline{AB}$

sulla circonferenza di

raggio 1

$\equiv$ misura in radianti dell'angolo x

Triangoli Rettangoli

$\triangle OCB$ e $\triangle OAD$ sono simili

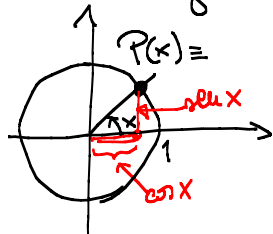
$$\overline{OC} : 1 = \overline{CB} : \overline{AD}$$

$\cos x \quad \sin x \quad \tan x$

IMPORTANTE $|\sin x| \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Def di $\sin x$ e $\cos x$

Preso un angolo x e individuato il punto $P(x)$ sulla circonferenza di raggio 1, le coordinate di $P(x)$ sono $\cos x$ e $\sin x$ ovvero $P(x) \equiv (\cos x, \sin x)$



Esercizio $f(x) = \sin x$ è una funzione continua

$\forall x \in \mathbb{R}$

dimi fissa $x_0 \in \mathbb{R}$ voglio provare f continua in x_0

$$x = \frac{x+x_0}{2} + \frac{x-x_0}{2}$$

$$x_0 = \frac{x+x_0}{2} - \frac{x-x_0}{2}$$

$$\sin x = \sin\left(\frac{x+x_0}{2} + \frac{x-x_0}{2}\right) = \sin \frac{x+x_0}{2} \cos\left(\frac{x-x_0}{2}\right) + \sin \frac{x-x_0}{2} \cos \frac{x+x_0}{2}$$

$$\cos x_0 = \cos \left(\frac{x+x_0}{2} - \frac{x-x_0}{2} \right) = \cos \frac{x+x_0}{2} \cos \frac{x-x_0}{2} - \sin \frac{x+x_0}{2} \sin \frac{x-x_0}{2}$$

$$|\cos x - \cos x_0| = 2 \left| \sin \frac{x-x_0}{2} \cos \frac{x+x_0}{2} \right|$$

$$= 2 \underbrace{\left| \sin \left(\frac{x-x_0}{2} \right) \right|}_{\leq \left| \frac{x-x_0}{2} \right|} \cdot \underbrace{\left| \cos \left(\frac{x+x_0}{2} \right) \right|}_{\leq 1}$$

$$= |x - x_0|$$

Ho provato $|\cos x - \cos x_0| \leq |x - x_0|$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\cos x - \cos x_0| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \varepsilon > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\cos x - \cos x_0| \leq |x - x_0| < \delta = \varepsilon$$

↑ prendo $\delta = \varepsilon$!

Esercizio

$$f(x) = \cos x \text{ è continua } \forall x \in \mathbb{R}$$

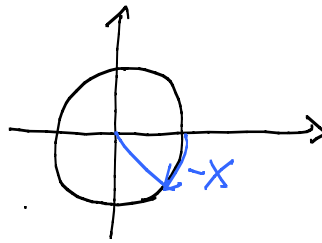
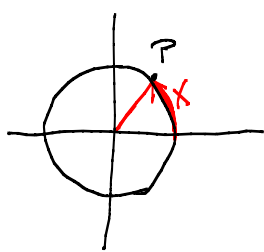
dim

$$\cos x = \cos \left(\frac{x+x_0}{2} + \frac{x-x_0}{2} \right) = \dots$$

$$\cos x_0 = \cos \left(\frac{x+x_0}{2} - \frac{x-x_0}{2} \right) = \dots$$

$$\cos x - \cos x_0$$

Gli angoli si misurano in radianti



2π è l'ampiezza dell'angolo giro

Ricordiamo le formule di prostaferesi,

$$\sin x - \sin x_0 = 2 \sin \left(\frac{x - x_0}{2} \right) \cos \left(\frac{x + x_0}{2} \right)$$

$$\cos x - \cos x_0 = 2 \sin \left(\frac{x - x_0}{2} \right) \sin \left(\frac{x + x_0}{2} \right)$$

$$|\sin x| \leq |x|$$

Osservazione importante

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$, sia $x_0 \in A$ un punto isolato

Allora f è continua in x_0

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \overset{x \in A}{|x - x_0|} < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

ma preso $\delta > 0$ sufficientemente piccolo

$$\exists x_0 - \delta, x_0 + \delta \cap A = \{x_0\}$$

e dunque l'unico punto in cui si fa il test

è il punto x_0 in cui si ha di certo $|f(x_0) - f(x_0)| = 0$

Ne segue che gli unici punti di qualche interesse sono i punti di accumulazione

Qo In un punto isolato, $\overset{x_0 \in A}{}$ se cambio il valore della funzione $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione rimane continua.

Esempio $f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$ non è continua in $x_0 = 0$

Abbiamo modificato il valore di f in un suo punto

di accumulazione, e questo viola la continuità in quel punto

Questo mi dice che, in un punto di accumulazione, la continuità è determinata dal comportamento della funzione nell'intorno del punto privato del punto stesso.

Limiti

$$f: A \rightarrow \mathbb{R} \quad x_0 \text{ p.d.a. per } A \quad x_0 \notin A$$

Vogliamo "ricostruire" il valore di f in x_0 a partire dagli ∞ punti di A contenuti in ciascun intorno di x_0

Non conosco $f(x_0)$! Dunque dovremo assegnargli un valore arbitrario $l \in \mathbb{R}$

$$\text{estensione } \tilde{f} = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ l & x = x_0 \end{cases}$$

Chiediamo che $\tilde{f}$ sia continua in x_0

$$\forall U \in \mathcal{I}_l \quad \exists V \in \mathcal{I}_{x_0} : \forall x \in A \cup \{x_0\} \quad x \in V \Rightarrow \tilde{f}(x) \in U$$

" "
 $\tilde{f}(x_0)$

$$f(x_0) = l$$

Osserva che certamente $f(x_0) \in U$

$$\forall U \in \mathcal{I}_l \exists V \in \mathcal{I}_{x_0} : \forall x \in A \quad x \in V \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in U$$

$$\text{ma } \forall x \in A \cap (V \setminus \{x_0\}) \quad \tilde{f}(x) = f(x)$$

$$\boxed{\forall U \in \mathcal{I}_l \exists V \in \mathcal{I}_{x_0} : \forall x \in A \quad x \in V \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in U}$$

$$\begin{array}{c} \updownarrow \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \end{array}$$

Def

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$ x_0 p.d.a. per A diciamo che

"limite per x che tende a x_0 di $f(x)$ è uguale a l "

e si indica con $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

$$\underline{\text{e}} \quad \forall U \in \mathcal{I}_l \exists V \in \mathcal{I}_{x_0} : \forall x \in A \quad x \in V \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in U$$

Dom l non è noto: la definizione di limite non aiuta a calcolare il valore del limite

la definizione permette di VERIFICARE se l è il limite oppure no!

Estendere una funzione in modo "continuo"

Sia dato $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, e sia x_0 un punto di accumulazione per A

Supponiamo che non sia definito $f(x_0)$

In che modo va definita f in x_0 ?

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \forall x \in A \setminus \{x_0\} \\ l & x = x_0 \end{cases}$$

Potremmo chiedere che $\tilde{f}$ sia continua in x_0

$$\forall U \in \mathcal{I}_\rho \exists V \in \mathcal{I}_{x_0} : \forall x \in A \quad x \in V \Rightarrow \tilde{f}(x) \in U$$

$$\text{Ma } \tilde{f}(x) = f(x) \quad \forall x \neq x_0$$

$$\boxed{\forall U \in \mathcal{I}_\rho \exists V \in \mathcal{I}_{x_0} : \forall x \in A \quad x \in \underline{\underline{V \setminus \{x_0\}}} \Rightarrow f(x) \in U}$$

↑ Questa è la definizione di limite
dove $f(x_0)$ non è definita, ovvero

- non testo f in x_0
- il presunto valore di f in x_0 è l

Esercizio

Se $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ è continua in $x_0 \in A$ p.d.o. per A

$$\text{allora } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Esercizio

Se $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ è continua in $x_0 \in A$ p.d.e. p.n.A

$$\text{allora } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

hip f continua in x_0

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in A \quad x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$



$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in A \quad x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$



$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad \Downarrow$$

viceversa

Esercizio

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ p.d.e. p.n.A

Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ allora f è continua in x_0

dim

$$\text{hip. } \forall U \in \mathcal{T}_{f(x_0)} \exists V \in \mathcal{T}_{x_0} : \forall x \in A \quad x \in V \Rightarrow f(x) \in U$$

$$\text{ma } f(x_0) \in U$$



$$\forall U \in \mathcal{T}_{f(x_0)} \exists V \in \mathcal{T}_{x_0} : \forall x \in A \quad x \in V \Rightarrow f(x) \in U$$



f continua in x_0

Q.E.D.

Teorema (Se il limite esiste allora è unico)

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 p.d.o. p.n. A

Se $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ allora questo valore l è unico

dimu

Supponiamo che $x_0 \in \mathbb{R} \leftarrow$ Non è restrittivo!

Assunto $\exists l_1 \neq l_2 \forall l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ t.c. $l_1 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ $l_2 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 : \forall x \in A \quad 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow l_1 - \varepsilon < f(x) < l_1 + \varepsilon$
 $\uparrow$
 $x \neq x_0$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0 : \forall x \in A \quad 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow l_2 - \varepsilon < f(x) < l_2 + \varepsilon$

$$\bar{\delta} = \min \{ \delta_1, \delta_2 \}$$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{\delta} > 0 : \forall x \in A \quad 0 < |x - x_0| < \bar{\delta} \Rightarrow \begin{cases} l_1 - \varepsilon < f(x) < l_1 + \varepsilon \\ l_2 - \varepsilon < f(x) < l_2 + \varepsilon \end{cases}$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{\delta} > 0 : \forall x \in A \quad 0 < |x - x_0| < \bar{\delta} \Rightarrow l_1 - l_2 < 0 < l_1 - l_2$

$\uparrow$
Assunto

$$\Rightarrow l_1 = l_2 \quad \text{⚡}$$

Esempio (in cui il limite $\exists$)

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \quad H(x) \text{ non ha limite in } x_0 = 0$$

dim

$$\tilde{H}(x) = \begin{cases} H(x) & x \neq 0 \\ l & x = 0 \end{cases} \quad \text{dovrei dimostrare se } \tilde{H} \text{ è continua in } x_0 = 0 \text{ per un certo valore di } l$$

$\exists \tilde{H}(x)$ non è continua in $x_0 = 0 \quad \forall l \in \mathbb{R}$

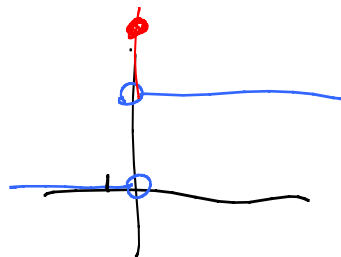
Def $H(x)$ non ha limite per $x \rightarrow x_0$

$$l \in \mathbb{R} \quad \neg \left(\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : x \in V_{\delta}(x_0) \Rightarrow f(x) \in U \right)$$

$$\exists U \in \mathcal{T}_f : \forall V \in \mathcal{T}_{x_0} \quad \exists x_V \in V_{\delta}(x_0) : f(x_V) \notin U$$

$$l \in \mathbb{R} \quad \exists \epsilon > 0 : \forall \delta > 0 \quad \exists x_\delta \in]-\delta, \delta[\setminus \{0\} : |H(x_\delta) - l| \geq \epsilon$$

$$l \geq 1, \quad 0 < l < 1, \quad l \leq 0$$



$$l \geq 1$$

$$\exists \epsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \exists x_\delta \quad 0 < |x_\delta| < \delta \quad |H(x_\delta) - l| \geq \epsilon$$

$$\exists \epsilon = \frac{1}{2} \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x_\delta = -\frac{\delta}{2} \quad 0 < |-\frac{\delta}{2}| < \delta \quad |H(-\frac{\delta}{2}) - l| = |0 - l|$$

$\frac{1}{2} > \frac{1}{2}$

$$0 < l < 1$$

$$\exists \varepsilon = \frac{1}{2} \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x_\delta \quad 0 < |x_\delta| < \delta \quad |H(x_\delta) - l| \geq \frac{1}{2}$$

$$0 < l \leq \frac{1}{2}$$

$$\exists \varepsilon = \frac{1}{2} : \forall \delta > 0 \quad \exists x_\delta = \frac{\delta}{2} : 0 < \frac{\delta}{2} < \delta \quad |H(\frac{\delta}{2}) - l| = |1 - l| \geq \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} < l < 1$$

$$\exists \varepsilon = \frac{1}{2} : \forall \delta > 0 \quad \exists x_\delta = -\frac{\delta}{2} : 0 < |-\frac{\delta}{2}| < \delta \quad |H(-\frac{\delta}{2}) - l| = |l| \geq \frac{1}{2}$$

$$l \leq 0$$

$$\exists \varepsilon = \frac{1}{2} \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x_\delta = \frac{\delta}{2} : 0 < \frac{\delta}{2} < \delta \quad |H(\frac{\delta}{2}) - l| = |1 - l| \geq \frac{1}{2}$$

On

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} H(x) = 1$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} H(x) = 0$$

$$\underline{\text{Def}} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l^+$$

$$\forall \epsilon \in]0, \infty[\quad \exists \delta \in]0, \infty[: \forall x \in A \quad x \in V_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in \bigcup \cap]l, l + \epsilon[$$

$$\underline{\text{Def}} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l^-$$

$$\forall \epsilon \in]0, \infty[\quad \exists \delta \in]0, \infty[: \forall x \in A \quad x \in (V_\delta(x_0) \cap]-\infty, x_0[\Rightarrow f(x) \in \bigcup \cap]-\infty, l + \epsilon[$$

Esempio verificare che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$
 va provato che

$$\forall \epsilon \in]0, \infty[\quad \exists M \in]0, \infty[: x \in V \Rightarrow f(x) \in \bigcup \cap]0, \epsilon[$$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists M > 0 : x > M \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x} \in]0, \epsilon[$$

$0 < \frac{1}{x} < \epsilon \Leftrightarrow x > \frac{1}{\epsilon}$ quindi basta prendere $M = \frac{1}{\epsilon}$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists M_\epsilon = \frac{1}{\epsilon} > 0 : x > M_\epsilon \Rightarrow 0 < \frac{1}{x} < \epsilon \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = -3 \quad f: A \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\forall U \in \mathcal{T}_{-3} \exists V \in \mathcal{T}_5 : \forall x \in A \quad x \in V \setminus \{5\} \Rightarrow f(x) \in U$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in A \quad 0 < |x - 5| < \delta \Rightarrow |f(x) + 3| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5 \quad f: A \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\forall U \in \mathcal{T}_5 \exists V \in \mathcal{T}_{+\infty} : \forall x \in A \quad x \in V \Rightarrow f(x) \in U$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists [a, +\infty[: \forall x \in A \quad x \in [a, +\infty[\Rightarrow |f(x) - 5| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists a \in \mathbb{R} : \forall x \in A \quad x > a \Rightarrow |f(x) - 5| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = -\infty$$

$$\forall U \in \mathcal{T}_{-\infty} \exists V \in \mathcal{T}_{-3} : \forall x \in A \quad x \in V \setminus \{-3\} \Rightarrow f(x) \in U$$

$\uparrow$
 $] -\infty, b[$

$\uparrow$
 $] -3 - \delta, -3 + \delta[$

$$\forall b \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 : \forall x \in A \quad 0 < |x + 3| < \delta \Rightarrow f(x) < b$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

$$l \in \mathbb{R}$$

$$x_0 \in \mathbb{R}$$

Teorema (f continua $\Rightarrow f$ localmente limitata)

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$ $x_0 \in A$

Se f continua in x_0

allora $\exists \delta > 0 \exists C = |f(x_0)| + 1, |f(x)| \leq C \forall x \in A \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$
dim

f continua in x_0 ma $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in A \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

fissato $\varepsilon = 1 \exists \delta > 0 : x \in A \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < 1$
" " " $-|f(x_0)| - 1 < f(x) < |f(x_0)| + 1$
" " " $|f(x)| \leq C = 1 + |f(x_0)|$
⚡