Lezione n.ro 2 Analisi 1 2 ottobre 2012

Titolo nota 29/09/2012

MOLTO IMPORTANTE

$\boxed{\text{NON È POSSIBILE}}$

STUDIARE TUTTI I RISULTATI DI ANALISI 1 NELL'INTEVALLO TEMPORALE data scritto - data orale

Ne segue che

DOVETE INIZIARE A STUDIARE

ORA!!!!

· COMPOSIZIONE di funzioni (e inverse) di funzioni elementari

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = 4 - x^2$

$g : [0, +\infty[\to \mathbb{R} \quad g(y) = \sqrt{y}$

$x \xmapsto{f} 4 - x^2 \longmapsto \sqrt{4 - x^2}$

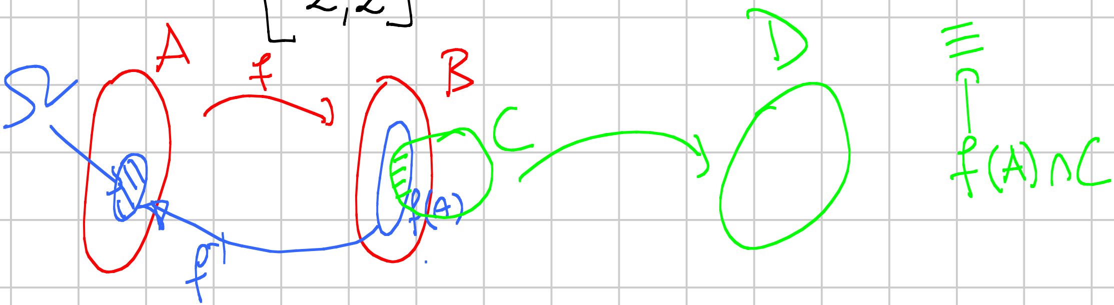
$x = 0 \longrightarrow 4 \longrightarrow 2$
$x = 1 \longrightarrow 3 \longrightarrow \sqrt{3}$
$x = 2 \longrightarrow 0 \longrightarrow \sqrt{0} = 0$
$x = 3 \longrightarrow -5 \not\longrightarrow$

$\mathbb{R} \xrightarrow{f} f(\mathbb{R}) =]-\infty, 4] \quad g : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$\Omega = f^{-1}\left( ]-\infty, 4] \cap [0, +\infty[\right) = f^{-1}\left([0, 4] \right) = [-2, 2]$

Dominio (Max) di $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ è quindi

$[-2, 2]$



Def $f: A \to B \quad g: C \to D$

se $\boxed{f^{-1}(f(A) \cap C) = \Omega \neq \emptyset}$ ha

senso considerare la funzione composta

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$(g \circ f) : \Omega \to D$$

Oss In generale $\Omega \subsetneq A$!

$f(x) = \log x$ è strettamente crescente $]0,+\infty[\to \mathbb{R}$

Oss Se f è monotona strettamente

crescente

allora "$\forall x,y \quad x<y$ se $f(x)<f(y)$"

Oss $f: A \to B$

f strettamente crescente se "$\forall x,y \in A \quad x<y \Rightarrow f(x)<f(y)$"

Def $f: A \to B$ una funzione, e sia

$\Omega \subseteq A$. La funzione $g(x) = f_{|\Omega}(x)$

viene detta "restrizione di f a Ω"

$g = f_{|\Omega} : \Omega \to B \qquad f_{|\Omega}(x) = f(x) \quad \forall x \in \Omega$

Oss $f(x) = \log_2 x$ è strettamente crescente

Esercizio 5. Sia S l'insieme delle soluzioni della disequazione $\log(x+1)+\log(x-2) \leq \log 10$. Allora

(A) $]2,4[\subset S$.
(B) $]-3,-1[\subset S$.
(C) $]-1,2[\subset S$.
(D) S non è limitato superiormente.

$S =]2,4]$

$f(x) = \log(x+1) + \log(x-2) \leq \log 10$

Per quali x "ha senso" $f(x)$ ovvero cerco il dominio (massimale) ove $f(x)$ è definita D

$$x \in D \iff \begin{cases} x+1>0 \\ x-2>0 \end{cases} \iff \begin{cases} x>-1 \\ x>2 \end{cases} \iff x \in \underbrace{]2,+\infty[}_{=D}$$

$$\begin{cases} x \in D \\ \log(x+1)+\log(x-2) \leq \log 10 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in D \\ \log(x+1)(x-2) \leq \log 10 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \in D \\ (x+1)(x-2) \leq 10 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in D \\ x^2-x-12 \leq 0 \end{cases}$$

$$x^2-x-12=0 \qquad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2} \begin{cases} 4 \\ -3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \in]2,+\infty[\\ -3 \leq x \leq 4 \end{cases} \iff x \in]2,4]$$

Scrittura usuale $]a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a<x<b\}$

$]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a<x\}$ $\quad]a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a<x\leq b\}$

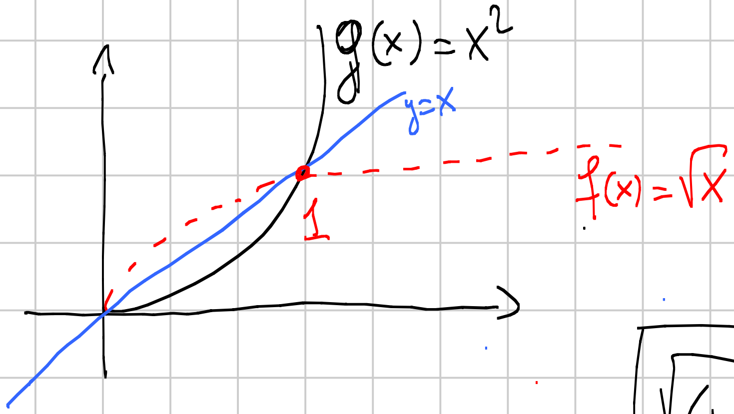
Disequazioni Irrazionali

(i) $\sqrt{f(x)} < g(x)$ $\quad (\leq)$

(ii) $\sqrt{f(x)} > g(x)$ $\quad (\geq)$

(iii) $\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)}$ $\quad (\leq, >, \geq)$

$f = \sqrt{x}$ è la funzione inversa di $g(x) = x^2 \big|_{\{x \geq 0\}}$



$$\boxed{\sqrt{4} = 2}$$

$\downarrow\downarrow\downarrow$

$\sqrt{4} = 2 \neq x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

$\nparallel$

$x = \sqrt{4} \Rightarrow x = 2$

Osservazione importante:

$f: \mathbb{R} \to [0,+\infty[$ $\quad f(x)=x^2$ NON è iniettiva

$\left(\text{infatti } f(x)=f(y) \iff x^2=y^2 \iff x=y \text{ o } x=-y \right)$

mentre

$f: [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ $\quad f(x)=x^2$ è iniettiva

$$\left(\begin{array}{l} \text{Infatti} \\ \underset{x,y\geq 0}{f(x)=f(y)} \ \underline{\text{sse}} \ \underset{x,y\geq 0}{x^2=y^2} \ \underline{\text{sse}} \ x=y \end{array} \right)$$

(i) $\sqrt{f(x)} < g(x)$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ \sqrt{f(x)} < g(x) \end{cases} \iff \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ \sqrt{f(x)} < g(x) \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{cases}$$

Esercizio: Per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ è soddisfatto $\sqrt{7-x} < x-1$

dim

$$\begin{cases} 7-x \geq 0 \\ \sqrt{7-x} < (x-1) \end{cases} \text{ sse } \begin{cases} 7-x \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \\ \sqrt{7-x} < x-1 \end{cases} \text{ sse } \begin{cases} 7-x \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \\ 7-x < (x-1)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 7 \\ 1 \leq x \\ x^2-2x+1+x-7 > 0 \end{cases} \text{ sse } \begin{cases} x \in [1,7] \\ x^2-x-6 > 0 \end{cases}$$

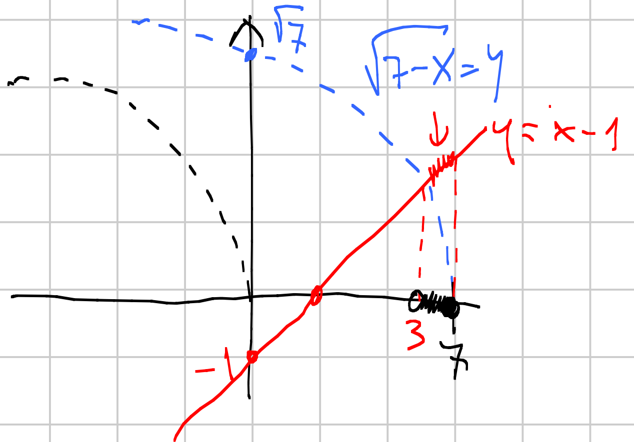
$$\text{sse } \begin{cases} x \in [1,7] \\ (x-3)(x+2) > 0 \end{cases} \text{ sse } \begin{cases} x \in [1,7] \\ x \in \underbrace{]-\infty,-2[\,\cup\,]3,+\infty[} \end{cases}$$

$$\text{sse } x \in \,]3,7]$$

$\sqrt{7-x} < x-1$

$\sqrt{7-4} < 4-1$ $\qquad$ $\sqrt{7-7} < 7-1$ ✓

$\sqrt{3} < 3$ ✓



$x-1=y$

(ii) $\sqrt{f(x)} > g(x)$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ \sqrt{f(x)} > g(x) \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \leq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ \sqrt{f(x)} > g(x) \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \leq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases}$$

Esercizio: Determinare per quali $x \in \mathbb{R}$ è soddisfatta la disequazione

$$\sqrt{1-x} > 1-3x$$

dim

$$\begin{cases} 1-x \geq 0 \\ 1-3x \leq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} 1-x \geq 0 \\ 1-3x > 0 \\ \sqrt{1-x} > 1-3x \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 1/3 \end{cases} \cup \begin{cases} x \leq 1 \\ x < 1/3 \\ (1-x) > (1-3x)^2 \end{cases}$$

$\underline{\text{sse}}$ $\frac{1}{3} \leq x \leq 1 \quad \cup \quad \begin{cases} x < \frac{1}{3} \\ 9x^2 - 6x + 1 + x - 1 < 0 \end{cases}$

$\underline{\text{sse}}$ $\frac{1}{3} \leq x \leq 1 \quad \cup \quad \begin{cases} x < \frac{1}{3} \\ 9x^2 - 5x < 0 \end{cases}$

$\underline{\text{sse}}$ $\frac{1}{3} \leq x \leq 1 \quad \cup \quad \begin{cases} x < \frac{1}{3} \\ 0 < x < \frac{5}{9} \end{cases}$

$\underline{\text{sse}}$ $\frac{1}{3} \leq x \leq 1 \quad \cup \quad 0 < x < \frac{1}{3}$

$\underline{\text{sse}}$ $x \in \,]0, 1]$

(iii) $\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)} \iff \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ \sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)} \end{cases}$

$\iff \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$

<u>Esercizio</u> Determinare per quali x è soddisfatta la diseq. $\sqrt{3-x} < \sqrt{x+1}$

$\iff$

$$\begin{cases} 3-x \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \\ \sqrt{3-x} < \sqrt{x+1} \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq 3 \\ -1 \leq x \\ 3-x < x+1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -1 \leq x \leq 3 \\ 2x > 2 \end{cases} \iff x \in [-1,3] \cap]1,+\infty[$$

$\iff x \in]1,3]$

Introduciamo la funzione $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, ovvero il "valore assoluto (o modulo) di x". Questa funzione si definisce come segue:

$$|x| = \max\{x, \; -x\}.$$

Vediamone le proprietà

1 • $|x| = x$ se $x \geq 0$, mentre $|x| = -x$ se $x < 0$.

2 • $|x| = 0$ se e soltanto $x = 0$

3 • $|x| = |-x|$

4 • $-|x| \leq x \leq |x|$

Inoltre, comunque si prendano x e y in $\mathbb{R}$

5 • $|x| \leq y$ se e soltanto se $-x \lesssim y \lesssim x$;

6 • $|x| \geq y$ se e soltanto se $[(x \geq y) \, o \, (-x \geq y)]$;

Infine ci sono le due disuguaglianze triangolari

7 • $|x + y| \leq |x| + |y|$ (infatti $-|x| \leq x \leq |x|$ e $-|y| \leq x \leq |y|$....);

8 $\big|\,|x| - |y|\,\big| \leq |x - y|$

① $|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$ ← quello che va provato

$x > 0 \Rightarrow -x < 0 < x \Rightarrow |x| = \max\{x, -x\} = x$

$x = 0 \Rightarrow -x = x = 0 \Rightarrow |0| = \max\{0, -0\} = 0$

$x < 0 \Rightarrow x < 0 < -x \Rightarrow |x| = \max\{x, -x\} = -x$

2) $|x| = 0$ sse $x = 0$

$\Leftarrow$ $x = 0 \Rightarrow |0| = \max\{0, -0\} = 0$

$\Rightarrow$ caso $x > 0 \Rightarrow |x| = \max\{x, -x\} = x > 0$ assurdo

caso $x < 0 \Rightarrow |x| = \max\{x, -x\} = -x > 0$ assurdo

$\Rightarrow \quad x = 0$

3) $|x| = |-x|$

$|x| := \max\{x, -x\}$ per definizione

$|-x| := \max\{-x, -(-x)\} = \max\{-x, x\} = |x|$

4) $-|x| \leq x \leq |x|$

$|x| := \max\{x, -x\} \Rightarrow |x| \geq x$ e $|x| \geq -x$

$\Rightarrow |x| \geq x$ e $-|x| \leq x$

$\Rightarrow -|x| \leq x \leq |x|$

5) $|x| \leq y$ sse $-y \leq x \leq y$

$|x| = \max\{x, -x\} \leq y$ sse $x \leq y$ e $-x \leq y$

sse $x \leq y$ e $x \geq -y$

sse $-y \leq x \leq y$

6) $|x| \geq y$ sse $(x \geq y)$ o $(-x \geq y)$

$|x| = \max\{x, -x\} \geq y$ sse $(x \geq y)$ o $(-x \geq y)$

sse $(x \geq y)$ o $(x \leq -y)$

7) $|x+y| \leq |x|+|y|$ Disuguaglianza Triangolare

(In un Triangolo, la lunghezza di un qualsiasi lato è inferiore alla somma delle lunghezze degli altri due)

Ricordo che
$$\left.\begin{aligned} -|x| \leq x \leq |x| \\ -|y| \leq y \leq |y| \end{aligned}\right\} \text{per la 5)}$$

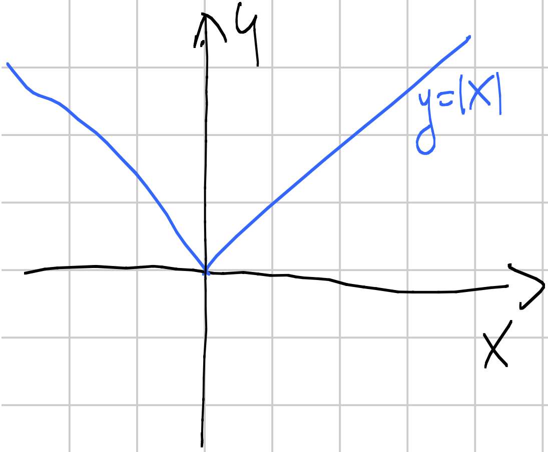
$$-|x|-|y| \leq x+y \leq |x|+|y|$$
$$\Updownarrow$$
$$|x+y| \leq |x|+|y|$$

8) $\big||x|-|y|\big| \leq |x-y| \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} |x| = |(x-y)+y| \leq |x-y|+|y| & a) \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\ \uparrow_{7)} \downarrow & \\ |y| = |(y-x)+x| \leq |x-y|+|x| & b) \end{cases}$$

ossia
$$\begin{cases} |y|-|x| \geq -|x-y| & a) \\ |y|-|x| \leq |x-y| & b) \end{cases}$$

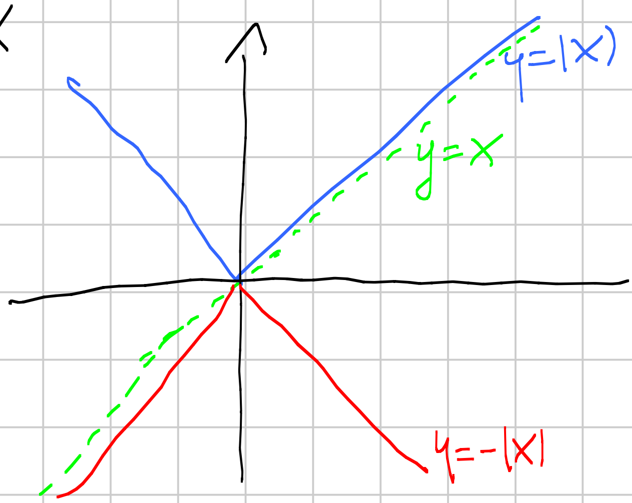
ossia $\quad -|x-y| \leq |y|-|x| \leq |x-y| \quad$ ossia $\overset{4)}{\ } \quad \big||y|-|x|\big| \leq |x-y|$



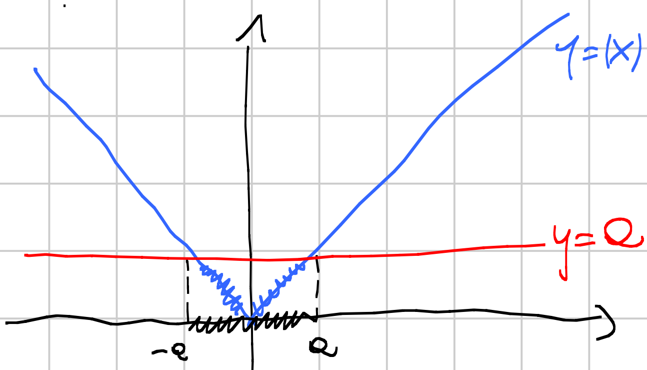
$|x| = x \quad x \geq 0$

$|x| = -x \quad x < 0$

$-|x| \leq x \leq |x|$

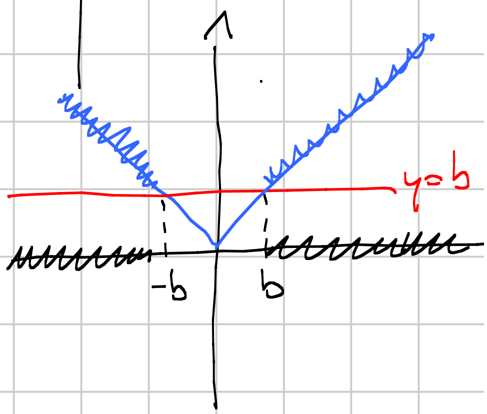


$|x| \leq a$ sse $-a \leq x \leq a$



$|x| \geq b$ sse $x \geq b$ o $-x \geq b$

sse $x \geq b$ o $x \leq -b$



Esercizio 1.1.1 *Determinare le soluzioni di* $|x-3| = |2x-3| - 2$

Esercizio 1.1.2 *Determinare le soluzioni di* $|x-1| = |x+2| - 1$

Esercizio 1.1.3 *Determinare le soluzioni di* $|2x - |x^2-3|| < 1$

Si possono poi definire

- $f^+ = \dfrac{|f|+f}{2}$, la"parte positiva di f"
- $f^- = \dfrac{|f|-f}{2}$, la "parte negativa di f"

$$|x-3| = |2x-3| - 2$$

Determinare le soluzioni

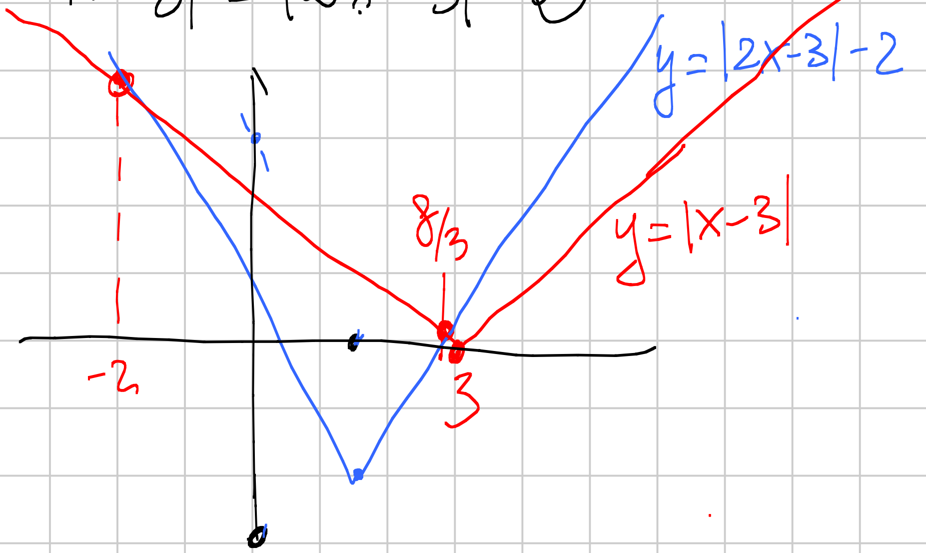
$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ 2x-3 \geq 0 \\ x-\cancel{3} = 2x-\cancel{3}-2 \end{cases} \cup \begin{cases} x-3 \leq 0 \\ 2x-3 \geq 0 \\ 3-x = 2x-5 \end{cases} \cup \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ 2x-3 \leq 0 \\ x-3 = 3-2x-2 \end{cases} \cup \begin{cases} x-3 \leq 0 \\ 2x-3 \leq 0 \\ 3-x = 1-2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ x \geq 3/2 \\ x = 2 \end{cases} \cup \begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq 3/2 \\ 3x = 8 \end{cases} \cup \cancel{\begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 3/2 \end{cases}} \cup \begin{cases} x \leq 3 \\ x \leq 3/2 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$\cancel{\begin{cases} x \geq 3 \\ x = 2 \end{cases}} \cup \begin{cases} \frac{3}{2} \leq x \leq 3 \\ x = 8/3 \end{cases} \cup \begin{cases} x \leq 3/2 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$|x-3| = |2x-3| - 2$$



$$\big|2x - |x^2-3|\big| < 1$$

$$\Updownarrow$$

$$-1 < 2x - |x^2-3| < 1$$

$$\Updownarrow$$

$$-1-2x < -|x^2-3| < 1-2x$$

или

$$2x-1 < |x^2-3| < 2x+1$$

$$\begin{cases} 2x-1 < |x^2-3| \\ |x^2-3| < 2x+1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2x-1 < |x^2-3| \\ -2x-1 < x^2-3 < 2x+1 \end{cases}$$

$$\text{или} \quad \begin{cases} x^2-3 > 2x-1 \\ -2x-1 < x^2-3 < 2x+1 \end{cases} \cup \begin{cases} -x^2+3 > 2x-1 \\ -2x-1 < x^2-3 < 2x+1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ <u>se</u> $\begin{cases} x^2-2x-2>0 \\ x^2+2x-2>0 \\ x^2-2x-4<0 \end{cases}$ o $\begin{cases} x^2+2x-4<0 \\ x^2+2x-2>0 \\ x^2-2x-4<0 \end{cases}$

Sono state utilizzate le seguenti proprietà $|\cdot|$

$|A| \geq B$ <u>se</u> $A \geq B$ o $-A \geq B$

$|C| \leq D$ <u>se</u> $-D \leq C \leq D$