

Presentazione del corso

Libri consigliati (vedi pagina web)

Docente: Marino Belloni

Contatti: marino.belloni@unipr.it

Pagina web: people.math.unipr.it/marino.belloni/

Esercitatrici: Deanna FIORANI,
Viriana DOLDI

Lezioni (ORARIO) (sempre aula F)
Lunedì 10.30-12.30, Martedì 8.30-10.30, Giovedì 10.30-12.30

Esercitazioni (ORARIO)

Martedì 14.30-16.30, Giovedì 16.30-18.30

Aula 8 - Prof.ssa Deanna FIORANI - (matricole PAR)

Aula F - Prof.ssa Viriana DOLDI - (matricole DISPARI)

MODALITÀ D'ESAME

Prima prova: 7 quesiti a risposta chiusa

Seconda prova: 4 esercizi a risposta aperta

Terza prova: prova orale

Prima prova: 7 quiz, ciascuno con

4 risposte di cui una sola è corretta

+3 risposte corrette

-1 " sbagliate

(la votazione va da -7 a 21)

chi totalizza una votazione ≥ 10

accede alla seconda prova

Seconda prova: 4 esercizi a risposta
aperta

(la votazione va da 0 a 40)

Voto dello scritto = $\frac{(\text{Voto 1}^{\text{a}} \text{ prova}) + (\text{Voto 2}^{\text{a}} \text{ prova})}{2}$
compleativo

Chi ottiene una votazione complessiva
 ≥ 17

può sostenere la prova orale

Prova orale: tutti gli argomenti trattati

nel corso
(votazione da $\emptyset$ a $+\infty$)

Votazione finale: $\frac{(\text{Voto Scritto}) + (\text{Voto Orale})}{2}$

Argomenti prova scritta: argomenti

introdotti nelle lezioni e nelle esercitazioni

Argomenti prova orale: le definizioni,

i Teoremi, le dimostrazioni, gli esempi

ed i controesempi trattati

a lezione

IMPORTANTE

Prima e seconda prova scritta sono una di seguito all'altra, in quanto la prima prova viene autovalutata dallo studente

- lo studente scrive la stringa delle risposte e il numero del suo compito
- lo studente esce dall'aula e legge la stringa corretta
- lo studente calcola il suo voto nella 1^a prova
 - $x \geq 10$ allora si accede alla seconda prova
 - $x < 10$ allora l'esame non è superato

Dopo al più 7 giorni si svolge la prova orale

MOLTO IMPORTANTE

NON E' POSSIBILE

STUDIARE TUTTI I RISULTATI
DI ANALISI 1 NELL'INTERVALLO
TEMPORALE data scrith - data orok

Ne segue che

DOVETE INIZIARE A STUDIARE

ORA!!!!

Ogni giorno, esiste un'ora in cui dormo (*)

$x \equiv$ giorno, $y \equiv$ ora,

$D(x,y) \equiv$ dormo l'ora y del giorno x

(*) $\forall x, \exists y : D(x,y) \text{ \u00e9 vero}$

non (*) $\Leftrightarrow$ non $(\forall x, \exists y : D(x,y) \text{ \u00e9 vero})$

$\Leftrightarrow \exists x : \forall y D(x,y) \text{ \u00e9 falso}$

$\Leftrightarrow$ "Esiste un giorno in cui
non dormo nessuna ora"

$\downarrow$ Proporzioni $\downarrow \cap$

A	B	$A \cap B$
V	V	V
V	F	F
F	F	F
F	F	F

$\downarrow \cup$

A	B	$A \cup B$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

$\downarrow$

A	B	$A \Rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

$\downarrow$

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

$\downarrow$

A	$\neg A$	B	$A \Leftrightarrow B$
V	F	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	V	F	V

$\neg A \vee \neg B \Leftrightarrow \neg(A \wedge B)$

Legge di
de Morgan

$$A \cap B \equiv \neg(A \cup \neg B)$$

$$A = \{x : x \in A\} \quad B = \{x : x \in B\}$$

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

$$\neg A \vee \neg B \Leftrightarrow \neg(A \wedge B)$$

$$(A \cap B) = A \cup B \quad \text{Legge de Morgan}$$

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$	A	B	$A \Rightarrow B$
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	F	F
F	V	V	F	V	F	V	V
F	F	V	V	V	F	F	V

$$\neg A \vee \neg B \Leftrightarrow A \Rightarrow B$$

$$\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$$

"non è vero che [se piove allora apro l'ombrello]"

$$\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$$

$\Rightarrow$ piove e non apro l'ombrello

Contronominale

$$A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$$

se piove allora apro l'ombrello $\Leftrightarrow$ se non apro l'ombrello allora non piove

A	B	$A \Rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

$\neg A$	$\neg B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
F	F	V
F	V	F
V	F	V
V	V	V

Per esempio

Se $\text{vinci } 10.000.000 \text{ € al superenalotto}$

allora $\text{regalami } 1000000 \text{ €}$

ma non è che $\neg A \circ B \Leftrightarrow A \Rightarrow B$ *

"non è vero che $\text{vinci } 10^7 \text{ € al superenalotto}$

mi regali 10^6 € "

Quest'ultima si riconosce falsa quando

" $\text{vinci } 10^7 \text{ € al superenalotto}$ " è vera

"mi regali 10^6 € " è falsa

Def: $A, B \neq \emptyset \quad A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\} \quad |||$

"Prodotto cartesiano degli insiemi A e B "

↓ ↓ ↓

Def: Una funzione $f: A \rightarrow B$ risulta individuata

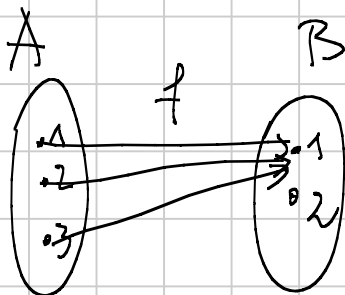
dal • dominio $A \neq \emptyset$

• codominio $B \neq \emptyset$

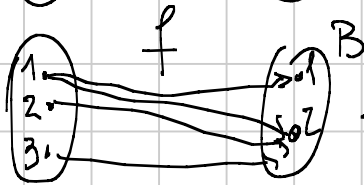
• applicazione f che soddisfa $\forall a \in A \exists! b \in B f(a) = b$

esiste almeno 1

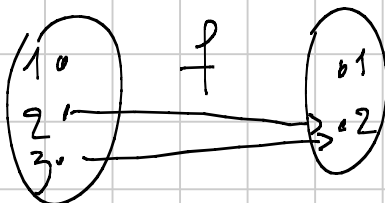
Grafico di $f = \{(a, f(a)) : a \in A\}$



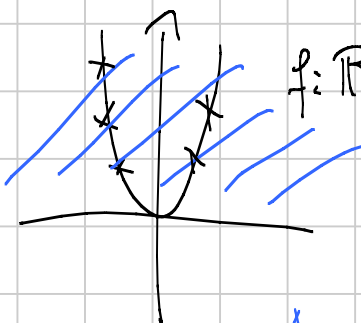
$\{(1, 1), (2, 1), (3, 2)\}$
è una funzione



NON è una f. ne
perché $f(1) = \{1, 2\}$



NON è una f. ne
perché $f(1) = \emptyset$



$f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$
 $\{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$
 $A \times B = \mathbb{R} \times [0, +\infty]$

insieme
vuoto

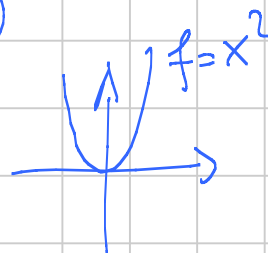
insieme che 0
esiste

Def "Grafico di $f: A \rightarrow B$ " è un sottoinsieme

di $A \times B$ che coincide con $A \times B$

nel solo caso in cui $B = \{b\}$

Esempio



• $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$ è una funzione

• $f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 2 \\ x-1 & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$ Non è una funzione



• $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ $f(x) = x^2$ è una

funzione suriettiva ^{poiché} $\sqrt{f(\mathbb{R})} = [0, +\infty)$

(ma non iniettiva: $f(-1) = f(1) = 1$ ad es)



• $f: [0, +\infty[\rightarrow (\mathbb{R})$ $f(x) = \sqrt{x}$ è una

funzione iniettiva poiché $\forall x, y \in [0, +\infty[$
 $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

(ma non è suriettiva: $\nexists x \in [0, +\infty[$ t.c. $f(x) = -1$)

Def Una f. $f: A \rightarrow B$ si dice

. iniettiva:

$$\boxed{\forall x, y \in A \quad x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)}$$

$$\begin{array}{ccc} \forall x, y & A & \Rightarrow B \\ & \parallel & \\ & (x \neq y) & f(x) \neq f(y) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \forall x, y & \neg B & \Rightarrow \neg A \\ & \uparrow & \uparrow \\ & f(x) = f(y) & x = y \end{array}$$

• suriettiva: " $\forall z \in B \quad \exists x \in A : f(x) = z$ "

ovvero " $f(A) = B$ "

Def: "Campo di esistenza" o "Dominio massimale"

di una applicazione $x \rightarrow f(x)$ è l'insieme

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\} = C.E.(f)$$

Esempio

$$\begin{array}{ll} f(x) = x^2 & \text{Dominio max} = \mathbb{R} \\ f(x) = \log x & \text{" " } =]0, +\infty[\end{array}$$

↑

Funzioni Elementari

- Polinomi: $f(x) = x^k$ $k=0,1,2,\dots$ $x \in \mathbb{R}$
- Funzioni trigonometriche: $f(x) = \sin x$ $g(x) = \cos x$ $x \in \mathbb{R}$
- Esponenziale: $f(x) = e^x$ $x \in \mathbb{R}$

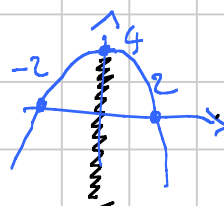
$$2 < e = 2,71\dots < 3 \quad (e^x)' = e^x$$

$$\log x = \log_e x$$

- Inverse funzioni elementari ✗
- Somme e prodotti di funzioni (e inverse) ✗
di funzioni elementari

• COMPOSIZIONE di funzioni (e inverse) di funzioni elementari

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \boxed{f(x) = 4 - x^2}$$



$$g: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \quad g(y) = \sqrt{y}$$



$$x \xrightarrow{f} 4 - x^2 \xrightarrow{g} \sqrt{4 - x^2}$$

$$x=0 \rightarrow 4 \rightarrow 2 = \sqrt{4}$$

$$x=1 \rightarrow 3 \rightarrow \sqrt{3}$$

$$x=2 \rightarrow 0 \rightarrow \sqrt{0} = 0$$

$$x=3 \rightarrow \textcircled{5} \rightarrow \text{no arrow}$$

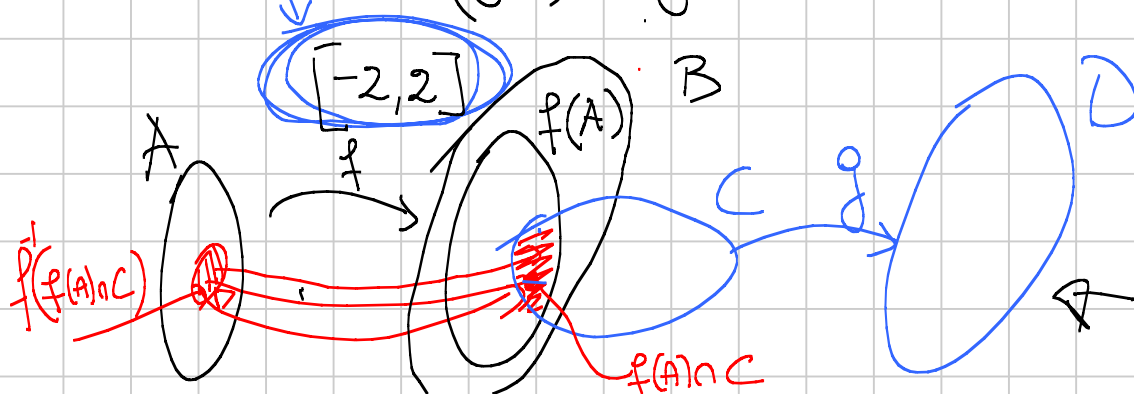
$$g(y) = \sqrt{y}$$

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} f(\mathbb{R}) =]-\infty, 4]$$

$$g: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$\Omega = f^{-1} \left(]-\infty, 4] \cap [0, +\infty[\right) = f^{-1}([0, 4]) = [-2, 2]$$

Dominio (Max) di $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ è quindi:



Def $f: A \rightarrow B$ $g: C \rightarrow D$

se $f^{-1}(f(A) \cap C) = \Omega \neq \emptyset$ le

senza considerare la funzione composta

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$(g \circ f): \Omega \rightarrow D$$

Dom in generale $\Omega \neq A$!

Esercizio $f(x) = x^2 - 3x + 2$ $g(y) = \log(y)$

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)) = \log(f(x)) = \log(x^2 - 3x + 2)$$

questa espressione
ha senso

se $x^2 - 3x + 2 > 0$

se $(x-2)(x-1) > 0$

se $x \in]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[= D$

D dominio max di $h(x) = \log(x^2 - 3x + 2)$

Esercizio: Determinare la funzione composta

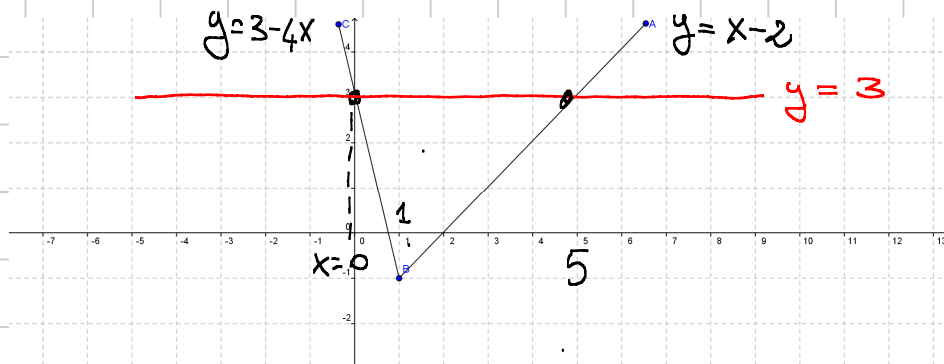
$$(g \circ f)(x) \rightarrow f(x) = \begin{cases} 3-4x & x < 1 \\ x-2 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow g(y) = \begin{cases} \log(1+|y|) & \text{se } y > 3 \\ e^{3y} & \text{se } y \leq 3 \end{cases}$$

dim:

$$\rightarrow g(f(x)) = \begin{cases} \log(1+|f(x)|) & \text{se } \underline{f(x) > 3} \\ e^{3f(x)} & \text{se } \underline{f(x) \leq 3} \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 3-4x & \text{se } x < 1 \\ x-2 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$



$$\begin{cases} y=3 \\ y=3-4x \end{cases}$$

$$x=0$$

$$\begin{cases} y=x-2 \\ y=3 \end{cases}$$

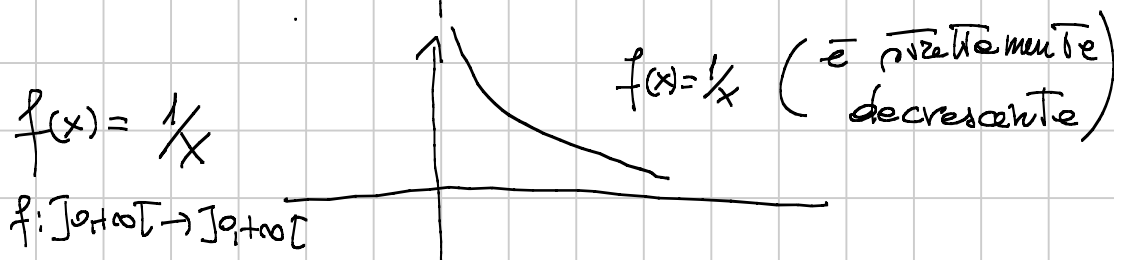
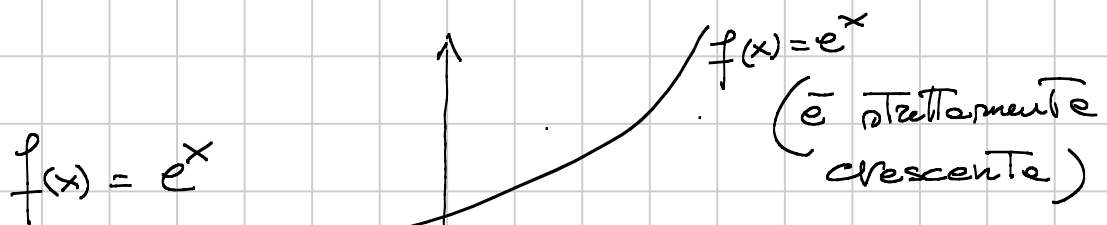
$$x=5$$

$$]-\infty, 0[\cup [0, 1[\cup [1, 5] \cup]5, +\infty[$$

$$f(x) > 3 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 0[\cup]5, +\infty[$$

$$f(x) \leq 3 \Leftrightarrow x \in [0, 5]$$

$$g(f(x)) = \begin{cases} \log(4-4^x) & x < 0 \\ e^{3-12x} & 0 \leq x < 1 \\ e^{3x-6} & 1 \leq x \leq 5 \\ \log(x-1) & 5 < x \end{cases}$$



Disuguaglianze esponenziali e logaritmiche

Def $f: A \rightarrow B$ si dice monotona

debolmente decrescente se $\forall x, y \in A \quad x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$

strettamente decrescente se $\forall x, y \in A \quad x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$

strettamente crescente se $\forall x, y \in A \quad x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

debolmente crescente se $\forall x, y \in A \quad x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

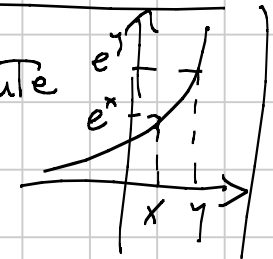
Esempio

$f(x) = e^x$ e strettamente crescente $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = \frac{1}{x}$ " decrescente $]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = \log x$ è strettamente crescente $]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

Dom Se f è monotona strettamente crescente
allora " $\forall x, y \quad x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ "



Esercizio

Determinare per quali valori di x è verificata

$$25^{2x^2-4} > 5^{10-2x^2-12x}$$

$\uparrow \qquad \qquad \uparrow$

$$25 = 5^2$$

$$(5^2)^{2x^2-4} > 5^{10-2x^2-12x}$$

$$5^{4x^2-8} > 5^{10-2x^2-12x}$$

$$f(4x^2-8) > f(10-2x^2-12x)$$

$\Downarrow$ ~~$\neq$~~

$$4x^2-8 > 10-2x^2-12x$$

$$6x^2+12x-18 > 0$$

$$x^2+2x-3 > 0$$

$$(x+3)(x-1) > 0$$

$$x \in]-\infty, -3[\cup]1, +\infty[$$

~~Strettamente crescente~~
 f
 $\downarrow$
 $f(x) = 5^x$

Esercizio 5. Sia S l'insieme delle soluzioni della disequazione $\log(x+1) + \log(x-2) \leq \log 10$. Allora

- (A) $]2, 4[\subset S$.

(B) $] - 3, -1[\subset S$.
- (C) $] - 1, 2[\subset S$.

(D) S non è limitato superiormente.

