

Lezione 5

I NUMERI REALI:

1) Calcolare il sup. e l'inf. dei seguenti insiemi, individuando gli eventuali max. e min. :

$$A = \left\{ \frac{2n+3}{5n} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\}, \quad B = \left\{ \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}, \quad C = \left\{ \frac{|3-2n|}{n+2} : n \in \mathbb{N} \right\},$$

$$D = \left\{ \frac{(-1)^n n + n}{2n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}, \quad E = \left\{ 2 - \frac{1}{(-1)^n \cdot n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}, \quad F = \left\{ \frac{3-2^n}{2^{n+1}} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

2) Dimostrare che l'insieme $A = \left\{ \frac{2}{n} - n^2, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$ non è inferiormente limitato e che l'insieme $B = \{n - 7 \sin(n) + 4 \cos(n) : n \in \mathbb{N}\}$ non è superiormente limitato.

RISULTATI:

1A) $\inf = 2/5$, $\sup = 1 = \max$; 1B) $\inf = 0 = \min$, $\sup = 1$; 1C) $\inf = 1/4 = \min$, $\sup = 2$; 1D) $\inf = 0 = \min$, $\sup = 1$;

1E) $\inf = 3/2 = \min$, $\sup = 3 = \max$; 1F) $\inf = -1/2$, $\sup = 1 = \max$

Lezione 6

NUMERI NATURALI E PRINCIPIO DI INDUZIONE:

1) Provare che

- $1 + 2 + \dots + n = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)$
- $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$

2) Provare per induzione che. a) $\forall n, 3^n \geq \frac{n}{2} \cdot 2^n$; b) $\forall n \geq 2, 3^n + 4^n \leq 5^n$;

c) $\forall n \geq 6, n^n > 2^n \cdot n!$; d) $\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$; e) $\forall n \geq 1, n! \geq 2^{n-1}$

3) Provare che $\sum_{k=0}^n q^k = \begin{cases} n+1, & q=1 \\ \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, & q \neq 1 \end{cases}, \quad \forall n \geq 0$

4) Provare che $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \quad \forall n \geq 1$

- 5) Siano date le seguenti uguaglianze $1 + 1/2 = 2 - 1/2$, $1 + 1/2 + 1/4 = 2 - 1/4$, $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 = 2 - 1/8$, etc. Trovare e dimostrare per induzione la legge generale che queste uguaglianze suggeriscono.
- 6) Trovare il coefficiente del termine a^4b^3 nello sviluppo di $(2a^2 - 3b)^5$.