

Lezioni 3 - 4

NUMERI COMPLESSI:

1) Calcolare il valore di

$$a) w = \frac{z^2 - \bar{z}^2}{(z+1)(\bar{z}-1)+1} \quad \text{quando } z = 1 + i ; \quad b) w = \frac{(\bar{iz}) + |z|}{z+i} \quad \text{quando } z = 3 - 4i ;$$

$$c) w = \frac{\bar{z} \cdot z^2 - iz}{2z - 3 - i} \quad \text{quando } z = 1 + 2i ; \quad d) w = \frac{\bar{z}^2 \cdot z - (\bar{iz})^2}{z^2 + 2} \quad \text{quando } z = 1 - i$$

2) Calcolare le seguenti potenze: a) $(\sqrt{3} - i)$; b) $(1 - i\sqrt{3})$; c) $w^6 = \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{6} \right)^6$

3) Calcolare e rappresentare graficamente nel piano di Gauss le radici n-esime (nei casi $n = 3$ e $n = 4$) di: a) $w = 1$; b) $w = i$; c) $-1 - i\sqrt{3}$

4) Determinare le soluzioni in C delle seguenti equazioni:

$$a) z^2 - 2iz - 5 = 0 ; \quad b) z + \bar{z} - \frac{1}{\bar{z}} = 0 ; \quad c) z^2 + |z| \cdot i + \sqrt{2} = 0 ; \quad d) 2z^2 - 4iz - (3 + i\sqrt{3}) = 0$$

$$e) z^6 = 8z^3 ; \quad f) z^2 \cdot \bar{z}^2 + 2\bar{z}^2 + iz^2 + 2i = 0 ; \quad g) (2 + 2i)z^4 - i\sqrt{2}z = 0$$

5) Determinare le soluzioni in C dei seguenti sistemi di equazioni:

$$a) \begin{cases} z \cdot \bar{w} = i \\ |z|^2 \cdot w + z = 1 \end{cases} ; \quad b) \begin{cases} \left| \frac{w}{2} \right| = |z| = \sqrt{2} \\ 2z + w = 4 \end{cases} ; \quad c) \begin{cases} |z - (1 + 3i)| = 2 \\ i \cdot (z + \bar{z}) = z - \bar{z} \end{cases} ; \quad d) \begin{cases} z + \bar{z} = -\frac{8}{5}|z| \\ \operatorname{Im} z = 2 + \operatorname{Re} z \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} z^2 = -|w|^4 \\ w^2 - (2i + 1)w = \frac{z + \bar{z}}{3} + 1 - i \end{cases} ; \quad f) \begin{cases} z^2 + w = 1 \\ 2\bar{w} + iz = 2 \end{cases}$$

RISULTATI: 1a) $-1 + i$; 1b) $2 + i$; 1c) $2 - 3i$; 1d) $-1/2 + 3/2 i$; 2a) $2^7(-1 + i\sqrt{3})$; 2b) $-2^7(1 + i\sqrt{3})$; 2c) $\frac{i}{8}$;

3a) con $n = 3$: $z_0 = 1$, $z_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$, con $n = 4$: $z_0 = 1$, $z_1 = i$, $z_2 = -1$, $z_3 = -i$; 3b) con $n = 3$: $z_{0,1} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}$,

$z_2 = -i$, con $n = 4$: $z_{0,1,2,3} = \cos\left(\frac{\pi}{8} + k \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{8} + k \frac{\pi}{2}\right)$, $k = 0, 1, 2, 3$; 3c) ...; 4a) $z_1 = 2 + i$, $z_2 = -2 + i$;

4b) $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4c) $z_{1,2} = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{5}{8}\pi + k\pi\right) + i \sin\left(\frac{5}{8}\pi + k\pi\right) \right)$, $k = 0, 1$; 4d) $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$, $z_2 =$

$-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$; 4e) $z_{1,2,3} = 0$, $z_4 = 2$, $z_{5,6} = -1 \pm i\sqrt{3}$; 4f) $z_{1,2} = \pm i\sqrt{2}$, $z_{3,4} = \pm \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$; 4g) $z_1 = 0$, $z_{2,3,4} =$

$\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \left(\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right) \right)$, $k = 0, 1, 2$; 5a) $z = 1/2 + 1/2i$, $w = 1 - i$; 5b) $z_1 = 1 + i$ e $w_1 = 2 - 2i$, $z_2 =$

$1 - i$ e $w_2 = 2 + 2i$; 5c) $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 3 + 3i$; 5d) $z_1 = -8 - 6i$, $z_2 = -8/7 + 6/7 i$; 5e) $w_1 = i$ e $z_1 = \pm i$, $w_2 = 1 + i$ e $z_2 = \pm 2 i$

; 5f) $w_1 = 5/4$ e $z_1 = 1/2 i$, $w_2 = 1$ e $z_2 = 0$, $w_3 = \frac{7}{8} + \frac{\sqrt{3}}{8}i$ e $z_3 = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i$, $w_4 = \frac{7}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8}i$ e $z_4 = -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i$