

STUDIO DI FUNZIONE

1) Studiare le seguenti funzioni e disegnarne il grafico:

a) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 2x - 1$; b) $f(x) = x^{\frac{4}{3}} - 8x^{\frac{1}{3}}$; c) $f(x) = 2x + 2 - 3\sqrt[3]{(x+1)^2}$;
 d) $f(x) = x^2 - 2x + 2\log|1+x|$; e) $f(x) = e^{ax} - a^2x$ (per $x \geq 0$) ; f) $y = \frac{k^2}{x} - kx$.

2) Studiare la funzione $f(x) = \min \left\{ 5, \frac{x^2}{|x-1|} \right\}$ e disegnarne il grafico.

3) Trovare il numero di soluzioni dell'equazione $2x^3 - 3x^2 - 36x + \alpha = 0$, ($\alpha \in \mathbb{R}$) .

4) Studiare la funzione $f(x) = x \cdot e^{\frac{2}{x}}$, determinando dominio, segno, limiti agli estremi del campo di esistenza, intervalli di monotonia, intervalli di concavità, eventuali massimi e minimi locali. Dopo aver determinato l'equazione dell'asintoto obliquo, stabilire in quali intervalli il grafico della curva sta al di sopra dell'asintoto obliquo e in quali sta al di sotto.

5) Data la funzione $f(x) = \frac{x(2-x)}{8+2x^2}$, disegnarne l'andamento qualitativo e determinare al variare di $T \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = T$.

6) Data la funzione $f(x) = 3x^5 - 50x^3 + 135x$, determinare il numero di radici reali dell'equazione $f(x) + k = 0$, al variare di $k \in \mathbb{R}$.

7) Trovare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione: $x^4 + 3x^3 - 5x^2 = 3x + k$.

8) Determinare, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni delle seguenti equazioni:

a) $e^{\frac{1}{x}} - ax = 0$; b) $\frac{2}{3}x^3 + a - 2\log x = 0$

9) Dimostrare che il grafico della funzione $f(x) = x^{100} + ax + b$ interseca l'asse delle ascisse al massimo in due punti .

10) Al variare di $a \in \mathbb{R}$, determinare le soluzioni della disequazione: $e^x \geq |ax|$.

RISULTATI:

1) a) $\min(1/2, -27/16)$, $F_1(-1, 0)$, $F_2(0, -1)$; b) $\min(2, -6\sqrt[3]{2})$, $F_1(-4, 12\sqrt[3]{4})$, $F_2(0, 0)$; c) $\min(0, -1)$, cuspidi in $(-1, 0)$; d) $F_1(-2, 8)$, $F_2(0, 0)$; e) per $a > 1$ $\min((1/a)\log a, a(1-\log a))$, per $a < 0$ funzione decrescente, per $0 < a \leq 1$ funzione crescente; f) per $k < 0$ $\min(\sqrt{-k}, -2k\sqrt{-k})$ e $\max(-\sqrt{-k}, 2k\sqrt{-k})$, per k

> 0 funzione decrescente; **2)** $\min_1(0, 0)$, $\min_2(2, 4)$, funzione costante $f(x) = 5$ per $x \leq \frac{-5-3\sqrt{5}}{2}$,

per $\frac{-5+3\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{5-\sqrt{5}}{2}$ e per $x \geq \frac{5+\sqrt{5}}{2}$; **3)** 1 soluz. per $\alpha < -44$ e per $\alpha > 81$, 2 soluz. per $\alpha = -44$ e

per $\alpha = 81$, 3 soluz. per $-44 < \alpha < 81$; **4)** asintoto $y = x - 2$, $\max(-2, -2e)$; **5)** asintoto $y = -1/2$,

$\min\left(-2-2\sqrt{2}, -\frac{1+\sqrt{2}}{4}\right)$, $\max\left(-2+2\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}-1}{4}\right)$, 1 soluz. per $T = -\frac{1+\sqrt{2}}{4}$, $T = \frac{\sqrt{2}-1}{4}$, $T = -1/2$,

2 soluz. per $-\frac{1+\sqrt{2}}{4} < T < -1/2$ e per $-1/2 < T < \frac{\sqrt{2}-1}{4}$; **6)** 1 soluz. per $k < -216$ e per $k > 216$, 2 soluz. per

$k = -216$ e per $k = 216$, 3 soluz. per $-216 < k < -88$ e per $88 < k < 216$, 4 soluz. per $k = -88$ e per $k = 88$, 5 soluz. per $-88 < k < 88$; **7)** 1 soluz. per $k = -36$, 2 soluz. per $-36 < k < -4$ e per $k > 101/256$, 3 soluz. per $k = -4$ e per $k = 101/256$, 4 soluz. per $-4 < k < 101/256$; **8)** a) 2 soluz. per $-1/e < a < 0$, 1 soluz. per $a = -1/e$ e per $a > 0$;

b) 1 soluz. per $a = -2/3$, 2 soluz. per $a < -2/3$; **10)** $-1/a < x < 0$.