

INFINITESIMI E CALCOLO DI LIMITI

1) Calcolare: a) $(x^2 + o(x^2))^3$; b) $\frac{o(x^2)}{x}$; c) $o(x^3 + o(x^4))$; d) $o(x + x^3 - o(x^4))^2$

2) Sviluppare fino all'ordine indicato le seguenti funzioni:

- a) $f(x) = x \cdot \sin x \cdot \log(1+x)$ fino al 5° ordine ; b) $f(x) = e^{x^2} - 1 - \sin^2 x$ fino al 4° ordine ;
c) $f(x) = \log(1+x^3) + \sin x - x$ fino al 3° ordine.

3) Calcolare ordine e parte principale per $x \rightarrow 0$ di:

- a) $f(x) = 1 - \cos x$; b) $f(x) = x - \sin x$; c) $f(x) = \cos x - 1 + \tan x$; d) $f(x) = 2x^2 \sin^2 x$;
e) $f(x) = \sin(\cos x - 1)$; f) $f(x) = (1+x)^a - 1$; g) $f(x) = (1 - \cos^2 x)^{\frac{1}{2}} - (\log(1+x^2))^{\frac{1}{2}}$

4) Calcolare ordine e parte principale per $x \rightarrow \pi/2$ di: $f(x) = \sin(\cos x)$

5) Calcolare ordine e parte principale per $x \rightarrow +\infty$ di: $f(x) = \frac{2x^2 + 3}{x^4 - 1}$

6) Date $f(x) = (x - \sin x)^2$ e $g(x) = x - \log(1+x)$, calcolare l'ordine di infinitesimo di $f(x)/g(x)$.

7) Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sin(x-1) \cdot \frac{e^{x^2-1} - 1}{x-1}}{x^2 - 1}$; b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 - \cos(x+1) \cdot \frac{3(x-1)}{e^{x^2-1} - 1}}{x+1}$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \sin\left(\log \frac{x+1}{x+2}\right)$;

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3}{\sin x} - \frac{1}{\sin 3x} \right)$; e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x \sin x}$; f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{\sin x}}{\frac{2}{x}}$; g) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}$;

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \left(1 - e^{\frac{x}{1+x^2}}\right)$; i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{1+x}}\right)$; l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1 - \sin^2 x}{x - \sin x}$; m) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1 - \sin(\pi x)}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}$;

n) $\lim_{x \rightarrow \pi} \left(\frac{1}{\sin x} + (\tan x)^{-1} \right)$; o) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - \sin^2 x}{(1+2x^2)^{-1} - \cos 2x}$; p) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} \cos 2x + \log(1-3x) - (1-x^2)^2}{x - \sin x}$; q)

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \sin x}{6 \sin x \cdot (1+3x^2)^{-1} - 6x + 19x^3}$.

8) Calcolare, al variare del parametro reale α , i seguenti limiti:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x^\alpha}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x}{e^x - 1} + \frac{x^\alpha}{x - \sin x} \right)$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{|x|^\alpha + x^2}$; d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \sin x}{(1-x)^{-1} \cos x - e^x - \frac{x^\alpha}{3}}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)^2 - \sin^2 x - \frac{x^\alpha}{3}}{(1+x^2) \log(1+x^2) - e^{x^2} + 1}$; f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos(x^2) - (1 - \cos x)^2 - \frac{x^\alpha}{4}}{(1+x^2)^{-1} \log(1+x^2) - \sin(x^2) + 3 \frac{x^\alpha}{2}}$

RISULTATI:

- 3) a) ordine 2, parte principale $x^2/2$; b) ord. 3, p.p. $x^3/6$; c) ord. 1, p. p. x ; d) ord. 4, p.p. $2x^4$; e) ord. 2, p.p. $-x^2/2$;
f) ord. 1, p.p. αx ; g) ord. 6, p.p. $-x^6/2$; 4) ord. 1, p.p. $-(x - \pi/2)$; 5) ord. 2, p.p. $2/x^2$; 6) ord. 4, p.p. $x^4/18$; 7) a) 2 ;
b) $3/2$; c) -1 ; d) ∞ ; e) 1 ; f) $1/2$; g) $-1/2$; h) -1 ; i) 1 ; l) 0 ; m) $\pi^2/2$; n) 0 ; o) $1/10$; p) -63 ; q) $+\infty$;
8) a) $1/6$ se $\alpha = 3$, 0 se $\alpha < 3$, $+\infty$ se $\alpha > 3$; b) 7 se $\alpha = 3$, 1 se $\alpha > 3$, $+\infty$ se $\alpha < 3$; c) $1/4$ se $\alpha = 2$, $1/2$ se $\alpha > 2$, 0 se $\alpha < 2$;
d) $+\infty$ se $\alpha = 3$, 0 se $\alpha < 3$, $1/2$ se $\alpha > 3$; e) $19/30$ se $\alpha = 4$, $+\infty$ se $\alpha < 4$, $-\infty$ se $\alpha > 4$; f) $1/48$ se $\alpha = 4$, $-1/6$ se $\alpha \neq 4$.