Lezione 8

LIMITI E CONTINUITA'

1) Determinare frontiera, interno, chiusura, insieme dei punti di accumulazione, insieme dei punti isolati dei seguenti insiemi:

a) A = $]0,5[$; b) B = Q $\cap [0,1[$; c) C = $\left\{3, \frac{1}{2}, 3-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 3-\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 3-\frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, 3-\frac{1}{n}, \ldots\right\}$

2) Determinare i punti di accumulazione dei seguenti insiemi numerici:

a) A = $\left\{\frac{2n+3}{5n} \;:\; n \in \mathrm{N},\ n \geq 1\right\}$; b) B = $\left\{2-\frac{1}{(-1)^n \cdot n} \;:\; n \in \mathrm{N} \setminus \{0\}\right\}$

3) Verificare, usando la definizione, l'esattezza dei seguenti limiti: a) $\lim_{x\to 1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty$;

b) $\lim_{x\to -\infty} \sqrt[3]{x-1} = -\infty$; c) $\lim_{x\to \infty} \frac{x+1}{x} = 1$; d) $\lim_{x\to 2} \frac{2x^2-9x+10}{x-2} = 1$

4) Stabilire se esiste il seguente limite: $\lim_{x\to 3} \frac{e^x - 1}{x^2-5x+6}$

5) Determinare il valore del parametro a $\in \Re$ per il quale esiste $\lim_{x\to -2} f(x)$, dove

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x-2} & x \leq -2 \\ \sqrt{x+a} & x > -2 \end{cases}$$

6) Studiare la continuità delle seguenti funzioni:

a) $f(x) = \frac{2x-3}{|x|+2}$; b) $f(x) = \begin{cases} 2senx & x < 0 \\ \log(x^2+e), & x \geq 0 \end{cases}$; c) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2-x} & , \ x < 1 \\ 2 & , \ x = 1 \\ \frac{1}{x} & , \ x > 1 \end{cases}$

7) Determinare il valore dei parametri a , b $\in \Re$ per i quali le seguenti funzioni risultano continue

$\forall$x$\in \Re$: a) $f(x) = \begin{cases} arctg\frac{1}{x} & x \in]0,1[\\ ax+b & x \notin]0,1[\end{cases}$; b) $f(x) = \begin{cases} a\log(1+x) & x \in [0, e-1] \\ x^2+b & x \notin [0, e-1] \end{cases}$

8) Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

a) f: R \ $\{0\} \to$ R è continua, $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$, f(- 1) > 0, f(1) < 0, allora f(x) si annulla almeno due volte.

b) la funzione $f(x) = \frac{3x}{e^x+2}$ non ha massimo perché il suo dominio non è un intervallo limitato e chiuso.

c) la funzione f(x) = $(x-2)^3 - 3x - 4$ assume in qualche punto dell'intervallo [1 , 3] il valore – 10.

d) se la funzione f(x), definita sull'intervallo [a , b], assume valori dello stesso segno negli estremi dell'intervallo, allora non esiste x $\in]a,b[$ in cui f(x) si annulla.

RISULTATI:

1) $\mathcal{F}$(A) = $\{0,5\}$, $\overset{o}{A} =]0,5[$, $\overline{A} = [0,5]$, D(A) = [0,5] , I(A) = Φ; $\mathcal{F}$(B) = Q $\cap [0,1]$,

$\overset{o}{B} = \Phi$, $\overline{B} = Q \cap [0,1]$, D(B) = Φ, I(B) = B ; $\mathcal{F}$(C) = C $\cup$ $\{0\}$, $\overset{o}{C} = \Phi$, $\overline{C}$ = C $\cup$ $\{0\}$, D(C) = $\{0,3\}$, I (C) = C\ $\{3\}$; 5) a = 3 ;

6) a) continua $\forall x \in \Re$; b) continua $\forall x \in \Re \setminus \{0\}$; c) continua $\forall x \in \Re \setminus \{1\}$; 7) a) $a = -\pi/4$, $b = \pi/2$; b) $a = (e-1)^2$, $b = 0$; 8) a) vera; b) falsa; c) vera, d) falsa.