Lezione 22

INTEGRALI GENERALIZZATI

1) Sia f : $[0,+\infty[\to R$ una funzione continua tale che f(0) = 0 e f(x) → - 1 per x → + ∞ . Allora:

(A) $\int_0^{+\infty} f = -\infty$; (B) $\int_0^{+\infty} f = -1$; (C) $\int_0^{+\infty} f = 0$; (D) non si può stabilire se f sia integrabile in senso generalizzato o no.

2) Studiare la convergenza dei seguenti integrali:

a) $\int_1^{+\infty} \frac{x}{1+x^6}dx$; b) $\int_0^1 \frac{t\cos t - \log(1+t)}{t^2}dt$; c) $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{x}}dx$; d) $\int_0^1 \frac{1}{\log x}dx$;

e) $\int_0^2 \frac{1}{e^x - e}dx$; f) $\int_0^1 \left(\frac{e^x}{senx} - \frac{1}{x}\right)dx$

3) Calcolare, se esistono, i seguenti integrali:

a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^6}dx$; b) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{2x}}{(1+e^x)^3}dx$; c) $\int_0^{\pi^2} \left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\cos\sqrt{x}dx$; d) $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}dx$; e) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x \frac{\cos x}{\mathrm{sen}^3 x} dx$

4) Determinare α ∈ R tale che i seguenti integrali convergano:

a) $\int_0^{+\infty} \frac{(\log x)^3}{\sqrt{x}\cdot(x+2)^\alpha}dx$; b) $\int_0^1 \frac{x^\alpha}{\log(1+x^4)}dx$; c) $\int_0^{+\infty} \frac{arctgx}{\left(x^2+1\right)^\alpha \cdot x^{3\alpha}}dx$; d) $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{\mathrm{e}^{\mathrm{x}} - \mathrm{e}^2}\cdot(\mathrm{x}-2)^\alpha}$;

e) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\cdot\log^\alpha(x+2)dx$; f) $\int_1^{+\infty} \frac{1+\log^2 x}{x^\alpha\cdot(1+5\log^2 x+6\log^4 x)}dx$; g) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x\cdot(x^2+x^{-2})^{\alpha/2}}dx$

5) Per α fissato, calcolare $\int_0^1 \frac{arcsenx^\alpha}{x^{1-\alpha}\sqrt{1-x^{2\alpha}}}dx$

6) Posto $I_n = \int_{1/(4n)}^{1/n} \frac{\cos x}{2\sqrt{x}}dx$, calcolare $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Stabilire inoltre per quali valori di α ∈R converge la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(n^\alpha I_n\right)$.

7) Dopo aver trovato tutte le primitive della funzione f(x) = $x\cdot 2^{-x^2}$, posto $a_n = \int_{\sqrt{n}}^{\sqrt{2n}} x\cdot 2^{-x^2}dx$,

calcolare la somma della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

8) Calcolare, se esiste (motivando la risposta), l'integrale $\int_{-2}^{1}(x^2-2x+2\log|1+x|)dx$

9) Sia f(x) = $\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+x}$

a) determinare $\lim_{x\to+\infty} f(x)$; b) determinare per quali α ∈ R converge $\int_0^{+\infty}\frac{f(x)}{x^\alpha}dx$.

RISULTATI:

1) (A) ; **2)** a) converge ; b)converge ; c) converge ; d) diverge; e) non esiste ; f) converge ; **3)** a) 0 ; b) 3/8 ; c) -4 ; d) 6 ; e) **4)** a) α > 1/2 ; b) α > 3 ; c) 1/5 < α < 2/3 ; d) α < 1/2 ; e) α < 0 ; f) α ≥ 1 ; g) α > 0 ; **5)** $\frac{\pi^2}{8\alpha}$; **6)** 0 ; α < - 1/2 ;

7) $-\frac{2^{-x^2}}{2\log 2}+c$; $\frac{1}{3\log 2}$; **8)** **9)** a) 1 , b) 1< α < 3/2