Lezione 21

FUNZIONE INTEGRALE E INTEGRALI DEFINITI

1) Calcolare, se esistono, i seguenti integrali definiti:

a) $\int_{-1}^{1} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{1+x^{\frac{4}{3}}} dx$; b) $\int_{1}^{e} \frac{\log x}{\sqrt{x}} dx$; c) $\int_{0}^{1} \frac{2+(x+1)\sqrt{x}}{2+x} dx$; d) $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{1+4sen^2 x} dx$;

e) $\int_{0}^{3\pi} \frac{1}{2+senx+\cos x} dx$.

2) L'integrale $\int_{e^{1/e}}^{e^e} \frac{(\log\log x)^3}{x\log x} dx$ (A) vale 1/4 ; (B) vale 0 ; (C) vale 1/2 ; (D) vale (e – 1/e) .

3) L'integrale $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x \cdot senx dx$ vale : (A) $\frac{\pi}{2} - 1$; (B) – 1 ; (C) 0 ; (D) 1

4) L'integrale $\int_{1}^{e} \frac{arctg(\log x)}{x} dx$ vale : (A) $\frac{\pi}{4} - \log\sqrt{2}$; (B) $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{e}$; (C) 2π ; (D) $\frac{arctg 1}{e}$.

5) Calcolare $\int_{-1}^{1} \left|e^{-x} - 2\right| dx$.

6) Dato $\lambda > 0$, studiare brevemente la funzione $f_\lambda(x) = \lambda x + 1/x$, per $x > 0$.

Detto x_λ il punto di minimo di f_λ su R^+, calcolare $\int_{1/2 x_\lambda}^{2x_\lambda} f_\lambda(t)dt$.

7) Data la funzione $f(x) = x^2 - 4|x| + 3$, studiarla e tracciarne il grafico.
Il grafico di f(x) e l'asse delle ascisse dividono il piano in varie parti, alcune delle quali di area finita; determinare l'area complessiva di queste ultime.

8) Calcolare $F(x) = \int_{0}^{x} f(t)dt$, dove $f(t) = -\frac{sen 2t}{1+sen^2 t}$.

9) Calcolare la derivata prima delle seguenti funzioni:

a) $F(x) = \int_{senx}^{\cos x} \sqrt{1-t^2}\, dt$; b) $F(x) = \int_{2x}^{x^2} \frac{e^t}{t} dt$; c) $F(x) = \int_{x}^{x^2} \sqrt{te^t}\, dt$

10) Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $F(x) = \int_{senx}^{\cos x} e^t dt$ nel suo punto di ascissa 0.

11) Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $F(x) = \int_{2x}^{x^2} \frac{sent}{t} dt$ nel suo punto di ascissa 2.

12) Discutere continuità e derivabilità della funzione F(x) = $\int_0^x f(t)dt$, dove F(x) : [- 1 , 3] → R e

$$f(t) = \begin{cases} -1, & -1 \le t < 0 \\ -2t, & 0 \le t \le 1 \\ 2t-4, & 1 < t \le 2 \\ 1, & 2 < t < 3 \\ 1/2, & t = 3 \end{cases}$$

13) Data la funzione F(x) = $\int_1^x e^{t^2} \cdot (sent + 3)dt$, stabilire se è invertibile e, in caso affermativo, calcolare $(F^{-1})'(0)$.

14) Dopo aver verificato che la funzione F(x) = $\left(\int_1^x e^{2t-t^2} dt - 1\right)$ è invertibile, detta G(x) la sua inversa, scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di G(x) nel suo punto di ascissa – 1.

15) Determinare il minimo valore assunto dalla funzione f(x) = $\int_0^x (t^3 - 2t) \cdot e^{-t} dt$.

16) Determinare il numero delle soluzioni dell'equazione $2x - \frac{1}{2}\int_0^x e^{-t^2} dt = 1$.

17) Il limite $\lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\int_0^x e^{-2t^2} dt\right) - x}{x^3}$ vale: (A) 1/6 ; (B) - 2/5 ; (C) – 2/3 ; (D) – ∞ .

18) Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\log x}\left(x - \int_1^x e^{\frac{1}{t}} dt\right)$; b) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\int_x^{2x} \frac{sent}{t} dt$.

19) Sono date le funzioni $f(t) = \begin{cases} 1, & -2 \le t < 0 \\ t+1 & 0 \le t < 1 \\ 2-t & 1 \le t \le 2 \end{cases}$ e F(x) : [-2 , 2] → R tale che F(x) = $\int_0^{ax} f(t)dt$ ∀ x ∈[- 2 , 2] e F(x) = 0 altrove.

Studiare continuità e derivabilità di F(x) al variare del parametro a ∈ R^+.

RISULTATI

1) a) $6\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{8}\log\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{8}\pi\right)$; b) 4 - 2√e ; c) $-\frac{4}{3} + \log\frac{9}{2} + 2\sqrt{2}arct\frac{\sqrt{2}}{2}$; d) $\frac{\pi}{8}$; e) $\sqrt{2}\left(arctg 2\sqrt{2} + 3arctg\sqrt{2}\right)$; **2)** (B) ; **3)** (D) ; **4)** (A) ; **5)** – 4 + 4log2 + e + 1/e ; **6)** 15/8+ log4 ; **7)** 16/3 ; **8)** F(x) = - log(1 + sen^2x) ; **9)** a) - |senx| · senx - |cosx| · cosx ; b) $\frac{1}{x}\left(2e^{x^2} - e^{2x}\right)$; c) $2x|x|\sqrt{e^{x^2}} - \sqrt{xe^x}$; **10)** y = - x + e – 1 ; **11)** y = (sen4)/2 · (x – 2) ; **12)** F(x) continua in [-1 , 3], non derivabile in x = 0 e in x = 2 ; **13)** $\frac{1}{e(sen1+3)}$; **14)** y = $\frac{1}{e}(x+1)+1$; **15)** $4 - e^{\sqrt{2}}\left(10 - 6\sqrt{2}\right)$; **16)** una soluzione ∈ $]0,1[$; **17)** (C) ; **18)** a) – 1 ; b) 1 ; **19)** F(x) continua ∀ a, F(x) derivabile in x = 0 ∀ a e in x = 1 per a = 1/2.