

Lezione 19

POLINOMI DI TAYLOR

- 1) Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine 5 centrato in $x_0 = 0$ per $f(x) = \operatorname{tg} x$.
- 2) Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine 3 centrato in $x_0 = 1$ per $f(x) = e^x$
- 3) Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine 4 centrato in $x_0 = \pi/4$ per $f(x) = \operatorname{sen} x$
- 4) Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine n centrato in $x_0 = 2$ per $f(x) = 1 + 2x - x^4/3 + x^5$
- 5) Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine 4 centrato in $x_0 = 0$ per $f(x) = e^x - e^{\operatorname{sen} x}$.

Calcolare poi, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}}{x^\alpha}$.

- 6) Sono dati i due seguenti sviluppi di Taylor: $f(x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$ e $g(x) = x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^5)$, per $x \rightarrow 0$. Sia $h(x) = f(x) \cdot g(x)$. Quale fra le seguenti affermazioni è falsa? (A) $h(x) = x^3 + o(x^4)$; (B) $h(x) = x^3 + \frac{x^5}{6} - \frac{x^7}{6} + o(x^7)$; (C) $h(x) = o(x^2)$; (D) $h(x) = x^3 + \frac{x^5}{6} + o(x^6)$.
- 7) Un polinomio di Taylor centrato in $x_0 = 0$ di $f(x) = e^x \operatorname{sen} x - x(1+x)$ è: (A) $x^3/3$; (B) $-x^2$; (C) $-x^3/6$; (D) $x^3/2$.

8) Calcolare lo sviluppo di Taylor di $f(x)$ fino ai termini di ordine 4, poi scrivere l'ordine di infinitesimo per $x \rightarrow 0$ e la parte principale, dove

$$f(x) = 3e^{x^2} - 2 \log(x^2 + 1) - x \cdot \frac{1}{1 - 2x} - 3 \cos x + \operatorname{sen} x$$

- 9) Approssimare il valore di e con un errore $< 10^{-3}$
- 10) Approssimare il valore di $\frac{1}{\sqrt{2}}$ con un errore $< 10^{-3}$
- 11) Approssimare il valore di $\sqrt{65}$ con un errore $< 10^{-4}$

12) Calcolare il valore aritmetico di $\sqrt[3]{9}$ sviluppando fino ai termini di ordine 3 e specificare un estremo superiore dell'errore che si commette.

RISULTATI

- 1) $x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$; 2) $\frac{e}{6}(x^3 + 3x + 2) + o((x-1)^2)$;
- 3) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{1}{6\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{1}{24\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4\right)$;
- 4) $\frac{95}{3} + \frac{214}{3}(x-2) + 72(x-2)^2 + \frac{112}{3}(x-2)^3 + \frac{29}{3}(x-2)^4 + (x-2)^5 + o(x^n)$; 5) $\frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{6} + o(x^4)$;
- 0 se $\alpha < 3$, 1 se $\alpha = 3$, $+\infty$ se $\alpha > 3$; 6) (B); 7) (A); 8) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{25}{6}x^3 - \frac{45}{8}x^4 + o(x^4)$; 9) 2,71805...
- con $n = 6$; 10) 0,70733... con $n = 5$; 11) $8 \sum_{k=0}^3 \binom{1/2}{k} \frac{1}{64^k} + \frac{5}{2^{31}}$; 12) 2,0800...; 5/248832.