

Lezione 12

SUCCESSIONI:

1) Stabilire quali fra le seguenti formule definiscono delle successioni:

a) $a_n = n + 20/n$; b) $a_n = \sqrt{\sin(n)}$; c) $a_n = \operatorname{tg}(\pi \cos(n\pi/6))$; d) $a_n = 1/(n^2 - 20 \cos n)$

2) Se la successione a_n è strettamente crescente, quale delle seguenti affermazioni è falsa?

(A) $a_n \rightarrow +\infty$; (B) a_n non ha massimo; (C) a_n è limitata inferiormente; (D) a_n ha solo estratte monotone

3) Se $-5 \leq a_n \leq 3$ per ogni n , allora:

(A) $a_n \cdot a_{n+1} \leq 25$; (B) $-5 \leq |a_n| \leq 3$; (C) $\inf. a_n = -5$; (D) $\max a_n = 3$

4) Se la successione a_n non è debolmente crescente, allora: (A) ha limite $-\infty$; (B) è monotona decrescente ; (C) non può essere monotona; (D) esiste almeno un n per cui $a_n > a_{n+1}$.

5) Calcolare $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \right)^n$, usando anche la disuguaglianza di Bernoulli.

6) Calcolare i seguenti limiti:

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+2}{3-n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3(n+1)} \right)$; b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{n^3} - 2\sqrt{n^5}}{1 + 3\sqrt[3]{n^7}} \right)$; c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^3} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{n-2}} - \frac{1}{\sqrt{n+3}} \right)$;

d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{(-1)^n n - 2}{3n - 2} \right)$; e) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{(-1)^n n - 2}{n^2 - 3} \right)$; f) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos \left(\frac{n\pi - \sin \frac{1}{n}}{n+2} \right) \cdot \operatorname{tg} \sqrt{\frac{(-1)^n + 2}{n \cos \frac{1}{n}}}$;

g) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sin \frac{1}{n}}{1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}}} \right)$; h) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n + 4^n}{3^n}$; i) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{n}$; k) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n)!}{2n!}$; l) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$; m) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3n}{n} \right)$;

n) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{2^n + 1}$; o) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{2^n + n}$; p) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n}$; q) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^2 - 2 \cos n}$; r) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n} - \frac{n}{7^n}}$;

s) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{2^n + 1}}$; t) $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n^2(1 - \cos \frac{1}{n})}$; u) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\cos \frac{\pi}{n} \right)^{n^2}$; v) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n! \sin \frac{1}{n^n} \right)^{\frac{1}{n}}$; y) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sin \frac{1}{n} \right)^{\sin \frac{1}{n}}$;

w) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\cos \frac{1}{n} \right)^{\sin^2 \frac{1}{n}}$; z) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{\sin \frac{1}{n}}}$.

7) Provare che $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n = 0$

8) Provare che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = e$ ($\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = e$, dove $a_n = \frac{n^n}{n!}$: si usi poi il legame tra criterio radice e criterio rapporto)

9) Provare che $e^{n(\sqrt[n]{n}-1)} \geq n$ e calcolare $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n(\sqrt[n]{n}-1))$

10) Il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(\sqrt[n]{n^3} - 1)}{(\sqrt[n]{n^4} + 1) \log n}$ vale: (A) $3/4$; (B) 0 ; (C) $3/2$; (D) $+\infty$

- 11) Il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(3n)^{5n} - (5n)^{3n}}{n^8}$ vale: (A) $3/5$; (B) $-5/3$; (C) $-\infty$; (D) $+\infty$
- 12) Il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\sqrt[3]{1 - \frac{2}{n}} - \sqrt[3]{1 - \frac{3}{n}} \right)$ vale: (A) $1/3$; (B) 1 ; (C) $-2/3$; (D) $+\infty$
- 13) Il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 \cdot \sin\left(\frac{3}{n}\right)}{\sqrt{n^4} - \sqrt{n^4 - 5n^3}}$ vale: (A) $3/5$; (B) $6/5$; (C) 0 ; (D) $+\infty$
- 14) Il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n)^n - n^{2n} \cdot 2^{-2n}}{(2e)^n - e^{2n}}$ vale: (A) 0 ; (B) $+\infty$; (C) $-\infty$; (D) nessuna delle precedenti
- 15) Data la successione $a_n = \frac{(3n)^n - n^{3n} \cdot 3^{-3n}}{e^{3n} - 3^n \cdot e^n}$, quale fra le seguenti affermazioni è vera?
 (A) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$; (B) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$; (C) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$; (D) nessuna delle precedenti è vera.
- 16) Calcolare il valore del seguente limite al variare di α $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n - n^{\alpha n}}{2n^{4\alpha} - n^3}$
- 17) Date due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tali che, quando $n \rightarrow +\infty$, si ha $n^2 a_n \rightarrow 0$, $n^3 b_n \rightarrow 0$, quale fra le seguenti affermazioni è falsa?
 (A) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$; (B) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) = 0$; (C) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(a_n - b_n) = 0$; (D) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^4 a_n \cdot b_n = 0$
- 18) Date due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tali che, quando $n \rightarrow +\infty$, si ha $n^4 a_n \rightarrow 1$, $n^3 b_n \rightarrow 1$, quale fra le seguenti affermazioni è falsa?
 (A) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 (a_n + b_n) = 1$; (B) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^4 (a_n - b_n) = 0$; (C) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^6 a_n \cdot b_n = 0$; (D) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \frac{a_n}{b_n} = 1$

RISULTATI:

- 2) (A); 3) (A); 4) (D); 5) 1; 6) a) -1 ; b) $-\infty$; c) $5/2$; d) ?; e) 0 ; f) 0 ; g) 2 ; h) $+\infty$; i) $+\infty$; k) $+\infty$; l) $+\infty$; m) $+\infty$;
 n) 2 ; o) 2 ; p) 3 ; q) 1 ; r) $1/2$; s) $+\infty$; t) $\sqrt{e}$; u) $e^{\frac{-\pi^2}{2}}$; v) $1/e$; y) 1 ; w) 1 ; z) e ; 10) (C); 11) (D); 12) (A); 13) (B);
 14) (B); 15) (B); 16) $-\infty$ se $\alpha < 3/4$ e se $\alpha > 1$, $+\infty$ se $3/4 \leq \alpha < 1$, 0 se $\alpha = 1$; 17) (A); 18) (B).