

Lezione 1

FUNZIONI

1) Determinare, se possibile, la funzione inversa di $f(x)$ nei seguenti casi:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x) = x^3 - 2 & \text{b) } f(x) = \begin{cases} x+1 & x > 0 \\ 2+2x & x \leq 0 \end{cases} & \text{c) } f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x-1 & -1 < x < 0 \\ 2x+1 & x \leq -1 \end{cases} \end{array}$$

2) Dopo aver verificato la condizione necessaria per la composizione delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$, costruire le funzioni composte $f \circ g(x)$ e $g \circ f(x)$ nei seguenti casi:

$$\text{a) } f(x) = x - 2, \quad g(x) = 4 - 3x \qquad \text{b) } f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3} - 1, \quad g(x) = \log(x)$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} x+1 & x > 0 \\ 2-2x & x \leq 0 \end{cases}, \quad g(x) = x^2 \qquad \text{d) } f(x) = \begin{cases} x+1 & x > 0 \\ 2-2x & x \leq 0 \end{cases}, \quad g(x) = f(x)$$

$$\text{e) } f(x) = \begin{cases} 2x+10 & x \leq -2 \\ 4-x & x > -2 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \cos(2x) & x > 2 \\ \sin(x) & x \leq 2 \end{cases}$$

$$\text{f) } f(x) = \begin{cases} -x & x < 3 \\ 2x-9 & x \geq 3 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} e^{x-1} & x \leq 1 \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) & x > 1 \end{cases}$$

3) Data la funzione $f(x) = \log(x)$, scrivere la sua funzione inversa $f^{-1}(x)$ e verificare che $f \circ f^{-1}(x) = f^{-1} \circ f(x) = x$

4) Date le seguenti funzioni, verificare se sono crescenti, debolmente crescenti, decrescenti, debolmente decrescenti:

$$\text{a) } f(x) = -x^3 \quad [\text{decrescente}] \qquad \text{b) } f(x) = \begin{cases} 7 & x \leq 2 \\ 1-x & x > 2 \end{cases} \quad [\text{debolmente decrescente}]$$

RISULTATI:

$$\text{1a) } f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+2}; \quad \text{1b) } f(x) \text{ non è iniettiva perché...; quindi...; } \quad \text{1c) } f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ -x-1 & -1 < x < 0 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} & x \leq -1 \end{cases};$$

$$\text{2a) } g \circ f(x) = 10 - 3x, \quad f \circ g(x) = 2 - 3x;$$

$$\text{2b) } g \circ f(x) = \log(\sqrt{x^2 - 2x + 3} - 1), \quad f \circ g(x) = \sqrt{\log^2 x - 2 \log x + 3} - 1;$$

$$\text{2c) } g \circ f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & x > 0 \\ (2-2x)^2 & x \leq 0 \end{cases}, \quad f \circ g(x) = \begin{cases} x^2+1 & x > 0 \\ 2-2x^2 & x \leq 0 \end{cases}; \quad \text{2d) } g \circ f(x) = \begin{cases} x+2 & x > 0 \\ 3-2x & x \leq 0 \end{cases} = f \circ g(x)$$

$$\text{2e) } g \circ f(x) = \begin{cases} \sin(2x+10) & x \leq -4 \\ \cos(2(2x+10)) & -4 < x \leq -2 \\ \cos(2(4-x)) & -2 < x < 2 \\ \sin(4-x) & x \geq 2 \end{cases} \qquad f \circ g(x) = \begin{cases} 4 - \cos(2x) & x > 2 \\ 4 - \sin(x) & x \leq 2 \end{cases}$$

$$\text{2f) } g \circ f(x) = \begin{cases} \sin\left(-\frac{\pi}{2}x\right) & x < -1 \\ e^{-x-1} & -1 \leq x < 3 \\ e^{2x-10} & 3 \leq x < 5 \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}(2x-9)\right) & x \geq 5 \end{cases} \qquad f \circ g(x) = \begin{cases} -e^{x-1} & x \leq 1 \\ -\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) & x > 1 \end{cases}$$