13 giugno 2012 Soluzioni esame

1) Determinate le soluzioni $(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ del sistema

$$\begin{cases} z^3 = z \\ |w| = 3|z| \\ \overline{z}w + z\overline{w} = 2\,. \end{cases}$$

Risposta:

Svolgimento $z^3 = z$ ha come soluzioni

$z_1 = 1$ $z_2 = -1$ e $z_3 = 0$ (quest'ultimo non è accettabile perché sostituendo nella 3^a eq. troverei $0 = 2$.

$$\begin{cases} z_1 = 1 \\ |w| = 3 \\ 2\,\mathrm{Re}\,w = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} z_1 = 1 \\ (\mathrm{Re}\,w)^2 + (\mathrm{Im}\,w)^2 = 9 \\ \mathrm{Re}\,w = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} z_1 = 1 \\ \mathrm{Im}\,w = \pm 2\sqrt{2} \\ \mathrm{Re}\,w = 1 \end{cases}$$

e analogamente

$$\begin{cases} z_2 = -1 \\ |w| = 3 \\ -2\,\mathrm{Re}\,w = 2 \end{cases} \quad \cdots\cdots \quad \begin{cases} z_2 = -1 \\ \mathrm{Im}\,w = \pm 2\sqrt{2} \\ \mathrm{Re}\,w = -1 \end{cases}$$

e quindi si trovano 4 soluzioni

$(1, 1+2\sqrt{2}i)$ $(1, 1-2\sqrt{2}i)$ $(-1, -1+2\sqrt{2}i)$ $(-1, -1-2\sqrt{2}i)$

$\square$

2) Sia data la funzione $f(x) = x^2 \log x$. Calcolare il dominio, i limiti della funzione agli estremi del dominio, le regioni di monotonia e gli eventuali punti di massimo e di minimo. Tracciate un grafico approssimativo della funzione.
Determinate poi, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.
Calcolate il seguente integrale: $\int_0^{\sqrt[3]{e}} f(x)\,dx$.

(Solo Analisi 1) Determinate per quali valori di x si ha $\int_0^x f(t)\,dt > 0$.

(Solo Analisi 1) Trovate poi il minimo di $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ al variare di x in $]0, +\infty[$.

Risposta:

Il logaritmo è definito per $x>0$ dunque $]0,+\infty[$ è il dominio della funzione

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 \log x = 0^- \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

Quindi la funzione si può estendere in 0 con continuità.

$$f'(x) = 2x\log x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x(2\log x + 1) = 0$$

sse

$$\log x = -\frac{1}{2} \quad \text{sse} \quad x = \frac{1}{\sqrt{e}} \qquad (x=0 \notin \text{dominio})$$

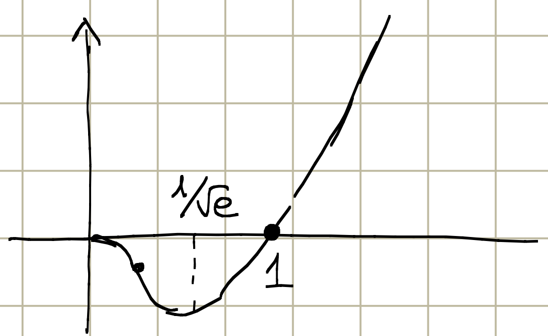
$$f''(x) = 2\log x + 3 \qquad f''\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = 2\log\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) + 3$$

$$= -1+3 = 2 > 0$$

ovvero $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ è un punto di minimo

Osserviamo inoltre che $f''(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$, ovvero esiste un punto di flesso in $]0, \frac{1}{\sqrt{e}}[$. Inoltre

$$f'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$



$$f(x) = k < f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2e} \qquad \text{0 soluzioni}$$

$$f(x) = -\frac{1}{2e} \qquad \text{1 soluzione}$$

$$f(x) = k \in \left]-\frac{1}{2e}, 0\right[\qquad \text{2 soluzioni}$$

$f(x) = k \in [0, +\infty[$ 1 soluzione

$$\int f(x)\,dx = \int x^2 \log x \, dx = \frac{x^3}{3}\log x - \frac{1}{3}\int x^3 \cdot \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\log x - \frac{x^3}{9} + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$\int_0^{\sqrt[3]{e}} f(x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\left(\log x - \frac{1}{3}\right)\right]_0^{\sqrt[3]{e}} = \frac{e}{3}\left(\log\sqrt[3]{e} - \frac{1}{3}\right) = 0$$

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt > 0 \quad \underline{se} \quad x > \sqrt[3]{e}$$

infatti $\quad F'(x) = f(x) > 0 \quad \forall x > 1$

$$F(\sqrt[3]{e}) = 0 \quad \text{con } \sqrt[3]{e} > 1$$

Per trovare il minimo di $F(x)$ si osserva che $F(0) = 0 \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$

mentre

$$f(x) = F'(x) = x^2 \log x = 0 \quad \underline{se} \quad \cancel{x = 0} \quad x = 1$$

e quindi il minimo cercato è

$$F(1) = \int_0^1 f(t)\,dt < 0$$

3) Calcolate il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(3^{1/x}-2^{1/x}\right).$$

(Solo Analisi 1) Calcolate, al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$, il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(3^{1/x}-2^{\alpha/x}\right).$$

Quando $x\to+\infty$, $\frac{1}{x}=y\to 0^+$ e si ha

$$3^y-2^y = e^{y\log 3}-e^{y\log 2} = 1+y\log 3-1-y\log 2+o(y)$$
$$= y\log\frac{3}{2}+o(y)$$

e quindi $\lim_{x\to+\infty} x\left(3^{1/x}-2^{1/x}\right) = \log 3/2$

$$3^y-2^{\alpha y} = y(\log 3-\alpha\log 2)+o(y)$$

quando $\overline{\alpha}=\frac{\log 3}{\log 2}$ si ha

$$3^y-2^{\overline{\alpha} y} = 3^y-3^y=0$$

ovvero $\lim_{x\to+\infty} x^2\left(3^y-2^{\overline{\alpha} y}\right)=0$

mentre

$$\alpha<\frac{\log 3}{\log 2} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{1}{x}(\log 3-\alpha\log 2)+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$
$$=+\infty$$

$$\alpha>\frac{\log 3}{\log 2} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{1}{x}(\log 3-\alpha\log 2)+o(y)\right)$$
$$=-\infty$$

$\square$

4) Sia data la funzione $g(x) = \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$. Trovate tutte le primitive di $g(x)$.

Posto poi $a_n = \int_0^{n^\alpha} g(x)\,dx$, studiate la convergenza della serie numerica $\sum_n a_n$ al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\int g(x)\,dx = \int \frac{\mathrm{arctg}\,x}{1+x^2}\,dx$$

$$= \int \mathrm{arctg}\,x \cdot (\mathrm{arctg}\,x)'\,dx$$

$$= \frac{1}{2}(\mathrm{arctg}\,x)^2 + C$$

$$a_n = \int_0^{n^\alpha} g(x)\,dx = \frac{1}{2}\left[\mathrm{arctg}(n^\alpha)\right]^2$$

$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ <u>se</u> $\alpha < 0$

(Dunque la serie NON converge se $\alpha \geq 0$)

Quando $\alpha < 0$, $\frac{1}{2}\left[\mathrm{arctg}(n^\alpha)\right]^2 \sim \frac{1}{2} n^{2\alpha}$

e $\sum_n \frac{1}{2} n^{2\alpha} = \sum_n \frac{1}{2n^{-2\alpha}}$ converge

<u>se</u>

$-2\alpha > 1$

<u>se</u>

$\alpha < -\frac{1}{2}$ $\square$

13 giugno 2012 Soluzioni Quiz

Esercizio 1. Sia $z \in \mathbb{C}$ tale che $|z-1+\mathrm{i}| = |z+1-\mathrm{i}|$. Quale tra le seguenti affermazioni è vera?

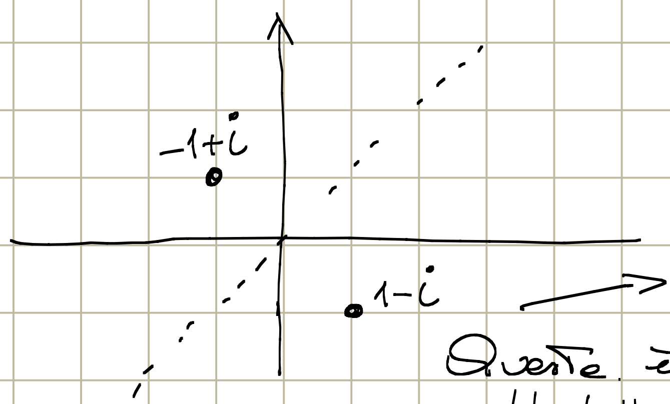
(A) $\Re(z) = \Im(z)$.

(B) $\Re(z) = 0$.

(C) $\Re(z) = -\Im(z)$.

(D) Nessuna delle altre risposte è vera.

$$|z-(1-i)| = |z-(-1+i)|$$



$$(a-1)^2+(b+1)^2 = (a+1)^2+(b-1)^2$$

$$-2a+2b = 2a-2b$$

$$a = b$$

$$\boxed{\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z}$$

Questa è la condizione soddisfatta dai punti z!

Dunque la (A) è corretta.

Esercizio 2. Sia S l'insieme di tutte le soluzioni della disequazione $\ln(-3x^2+9x+12) < \ln(-2x^2-2x+12)$. Quale tra le seguenti risposte è **vera**?

(A) $S =]-1,0[$.

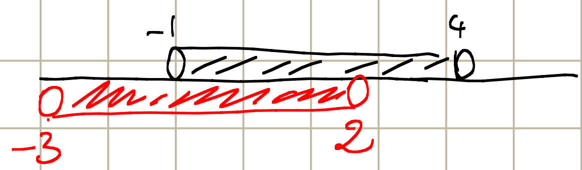
(B) $S =]-1,2[$.

(C) $]-1,1[\subset S$.

(D) Nessuna delle altre risposte è vera.

$$-3x^2+9x+12>0 \iff x^2-3x-4<0 \iff (x-4)(x+1)<0$$

$$-2x^2-2x+12>0 \quad " \quad x^2+x-6<0 \quad " \quad (x+3)(x-2)<0$$



quindi il campo di esistenza è $]-1,2[$

la disequazione è soddisfatta quando

$x^2-11x>0$ sse $x(x-11)>0$

ovvero nell'insieme $\left(]-\infty,0[\cup]11,+\infty[\right) \cap]-1,2[$

e quindi la disequazione è vera in $]-1,0[$ $\quad$ [[A]]

Esercizio 3. Un sacchetto contiene 7 palline numerate da 1 a 7; ne vengono estratte una dopo l'altra 3. Al termine, le 3 palline vengono rimesse nel sacchetto e rimescolate, poi si ripete l'estrazione. Qual è la probabilità che di nuovo vengano estratte le 3 palline di prima, e nello stesso ordine?

(A) $\frac{1}{7 \cdot 6 \cdot 5}$.

(B) $\frac{1}{7!}$.

(C) $\frac{1}{3!}$.

(D) $\frac{1}{\binom{7}{3}}$.

Quello che si richiede è la probabilità che venga estratta una data disposizione di 3 el.ti da un insieme di 7

N.ro 3-disposizioni da un 7-insieme $\frac{7!}{(7-3)!} = 5 \cdot 6 \cdot 7$

e dunque la risposta corretta è la (A)

Esercizio 4. La successione $(n^n - n!)\left(\frac{1}{n^n} - \frac{1}{n!}\right)$

(A) tende a $-\infty$.

(B) tende a $+\infty$.

(C) tende a 1 .

(D) tende a 0 .

$n^n \sim e^n \cdot n! \Rightarrow \left(\frac{1}{n^n} - \frac{1}{n!}\right) \sim -\frac{1}{n!}$ mentre $(n^n - n!) \sim n^n$

$$\Rightarrow (n^n - n!)\left(\frac{1}{n^n} - \frac{1}{n!}\right) \sim -\frac{n^n}{n!}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty}\left[(n^n - n!)\left(\frac{1}{n^n} - \frac{1}{n!}\right)\right] = -\infty \qquad \square$$

Esercizio 5. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione crescente. Allora

(A) $f(x)$ ha limite per $x \to -\infty$.

(B) f ha massimo nell'intervallo $[0, 1[$.

(C) L'integrale generalizzato $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ è convergente.

(D) $f(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$.

(A) è vera (B) è falsa: $f(x) = \frac{1}{1-x}$ è crescente in $[0,1[$ ma non ha max

(C) è falsa: $f(x) = x$ è crescente ma $\int_0^{+\infty} x\,dx = +\infty$

(D) è falsa: $f(x) = \operatorname{arctg} x \xrightarrow[x \to +\infty]{} \pi/2$ ed è crescente

Esercizio 6. Se $f(x)$ ha derivata uguale a $x \operatorname{sen} x$ e $f(\pi) = 0$, allora

(A) $f(x) = \operatorname{sen} x - x \cos x - \pi$.

(B) $f(x) = \dfrac{x^2}{2} \operatorname{sen} x$.

(C) $f(x) = \pi - x \cos x$.

(D) $f(x) = \operatorname{sen} x + x \cos x + \pi$.

$$\int x \operatorname{sen} x \, dx = x(-\cos x) - \int (-\cos x) \, dx$$

$$= -x \cos x + \operatorname{sen} x + c = f(x)$$

$$f(\pi) = 0 = -\pi \cos \pi + \operatorname{sen} \pi + c \quad \text{se} \quad c = -\pi$$

e dunque (A) è corretto $f(x) = \operatorname{sen} x - x \cos x - \pi$

Esercizio 7. Se una funzione f ha in $x_0 = 0$ un punto di massimo locale, allora un suo sviluppo di Taylor può essere

(A) $f(x) = 2 - 3x^4 + o(x^4)$.

(B) $f(x) = 1 - 4x^3 + o(x^3)$.

(C) $f(x) = x - x^2 + o(x^2)$.

(D) $f(x) = -1 + x^2 + o(x^2)$.

(A) è vero: infatti $f(0) = 2$ $f'(0) = 0 = f''(0) = f'''(0)$

$f^{IV}(0) < 0$

(B) è falso: $f(0) = 1$ $f'(0) = f''(0) = 0$ $f'''(0) < 0$

e quindi non può essere né max né min

(C) è falso $f(0) = 1$ $f'(0) = 1$ e quindi siamo

in un caso analogo a (B)

(D) è falso $f(0) = -1$ $f'(0) = 0$ $f''(0) > 0$

e questo può essere lo sviluppo relativo

ad un punto di minimo locale