COGNOME ______________________	NON SCRIVERE QUI
NOME ______________________	1 2 3 4
MATRICOLA ⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌋	A
CORSO AMB-CIV GEST MEC INF-ELN-TCOM	

UNIVERSITÀ DI PARMA— FACOLTÀ DI INGEGNERIA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA 1 - SECONDA PARTE

A.A. 2010-2011 — PARMA, 11 APRILE 2012

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo IN STAMPATELLO cognome, nome e numero di matricola, e fate una barra sul Corso. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti.
Il tempo massimo per svolgere la prova è di **due ore per Analisi 1, un'ora e mezzo per Analisi AB**. Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.
È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti dentro quello con il testo.
Potete usare solo il materiale ricevuto e il vostro materiale di scrittura (in particolare è vietato usare appunti, calcolatrici, foglietti ecc.). Non usate il colore rosso.
Nell'apposito spazio, **dovete riportare sia la risposta che lo svolgimento** (o traccia dello svolgimento).

1) Determinate tutti i numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ che distano 5 da $\mathbf{i}$ e che verificano l'equazione $|z| = |z + 3\mathrm{i}|$.

Risposta:

$|z-i| = 5$

$|z+3i| = |z|$

$$\begin{cases} a^2 + (b-1)^2 = 25 \\ a^2 + (b+3)^2 = a^2 + b^2 \end{cases}$$

$z = a + ib$

$$\begin{cases} a^2 + (b-1)^2 = 25 \\ 6b + 9 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + \frac{25}{4} = 25 \\ b = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 = \frac{75}{4} \\ b = -3/2 \end{cases}$$

$z_1 = \frac{5}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2} i$

$z_2 = -\frac{5}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2} i$

2) Sia data la funzione $f(x) = x^2 - 3|x-1| + 2$.

(a) Tracciate un grafico di f .

(b) Determinate al variare di $k \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$ che appartengono all'intervallo $[-2, 3]$.

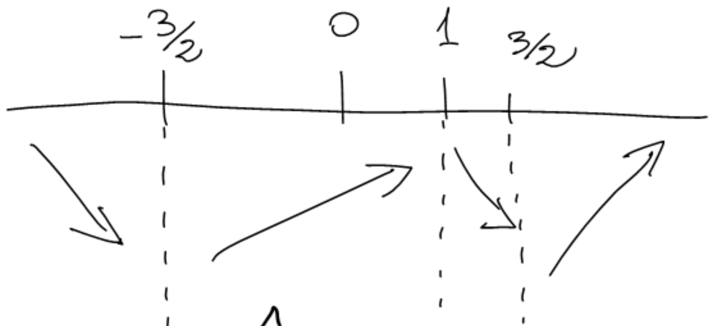
(c) Determinate l'immagine $f([-2, 3])$.

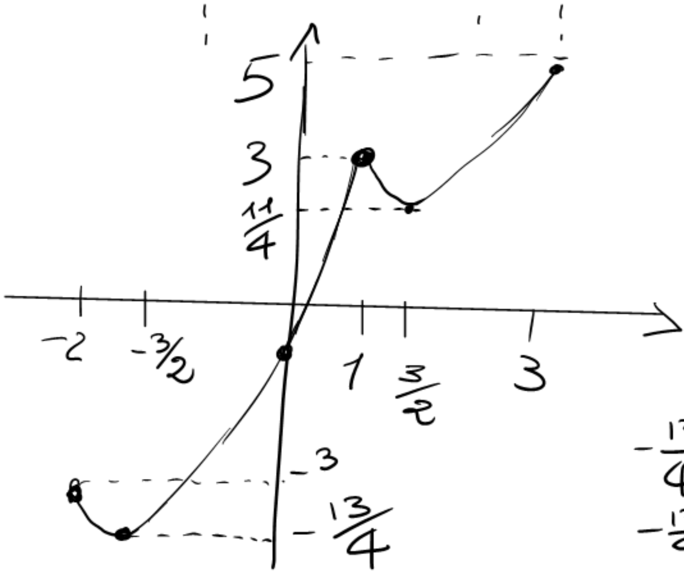
(d) Calcolate l'integrale $\displaystyle\int_{-2}^{3} f(x)\, dx$.

Risposta:

$$f = \begin{cases} x^2 + 3x - 1 & x \leq 1 \\ x^2 - 3x + 5 & x > 1 \end{cases} \qquad f' = \begin{cases} 2x + 3 & x < 1 \\ 2x - 3 & x > 1 \end{cases}$$

$f'(x) = 0$ se $x = \pm \frac{3}{2}$





$3 < k \leq 5 \longrightarrow 1$ sol

$3 = k \longrightarrow 2$ sol

$\frac{11}{4} < k < 3 \longrightarrow 3$ sol

$\frac{11}{4} = k \longrightarrow 2$ sol

$-3 < k < \frac{11}{4} \longrightarrow 1$ sol

$-\frac{13}{4} < k \leq -3 \longrightarrow 2$ sol

$-\frac{13}{4} = k \longrightarrow 1$ sol

$$f([-2, 3]) = \left[-\frac{13}{4}, 5\right]$$

$$\int_{-2}^{1} (x^2 + 3x - 1) + \int_{1}^{3} (x^2 - 3x + 5) = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 - x\right]_{-2}^{1} + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 5x\right]_{1}^{3}$$

$$= \cancel{\frac{1}{3}} + \frac{3}{2} - \cancel{1} + \frac{8}{3} - \cancel{6} - \cancel{2} + \cancel{9} - \frac{27}{2} + 15 - \cancel{\frac{1}{3}} + \frac{3}{2} - 5 = -\frac{21}{2} + \frac{8}{3} + 10$$

$$= \frac{-63 + 16 + 60}{6} = \frac{13}{6}$$

3) Calcolate il seguente limite: $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x \operatorname{sen} x - \dfrac{x}{1-x}}{1 - x\log(1+2x) - \cos(2x)}$.

(Solo Analisi 1) Calcolate poi, al variare di $\alpha > 0$, il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x \operatorname{sen} x - \dfrac{x^\alpha}{1-x}}{1 - x\log(1+2x) - \cos(2x)} .$$

Risposta:

$\alpha = 1$

$$\frac{(1-x)e^x \sin x - x^\alpha}{1 - x\log(1+2x) - \cos 2x} \cdot \frac{1}{(1-x)} = \frac{-\frac{2}{3}x^3 + o(x^3)}{(2x^3 + o(x^4))(1-x)} \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\frac{1}{3}$$

$0 < \alpha < 1$

$$\frac{(1-x)e^x \sin x - x^\alpha}{1 - x\log(1+2x) - \cos 2x} \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{-x^\alpha + o(x^\alpha)}{(2x^3 + o(x^4))(1-x)} \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$$

$1 < \alpha$

$$\frac{(1-x)e^x \sin x - x^\alpha}{1 - x\log(1+2x) - \cos 2x} \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{x + o(x)}{(2x^3 + o(x^4))(1-x)} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$$

4) Motivando la risposta, dite se esiste e se converge l'integrale generalizzato

$$\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt{x}-x}\,dx\,.$$

(Solo Analisi 1) Discutete poi al variare dell'esponente $\alpha > 0$ il carattere dell'integrale

$$\int_0^1 \frac{(1-x)^\alpha}{\sqrt{x}-x}\,dx\,.$$

Risposta:

L'integrando è definito e continuo su $(0,1)$

quindi si devono studiare $\int_0^{1/2} f(x)\,dx$ e $\int_{1/2}^1 f(x)\,dx$

$\boxed{x=0}$ $f(x) \sim \left(\frac{1}{x}\right)^{1/2}$ e dunque $\int_0 f(x)\,dx$ $\left(\frac{1}{2}<1\right)$

$\boxed{x=1}$ $f(x) = \frac{(1-x)^{1/3}}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})} \cdot \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = \frac{(1-x)^{1/3}(1+\sqrt{x})}{(1-x)\ \sqrt{x}} \sim \frac{2}{(1-x)^{2/3}}$

e dunque $\int_{1/2}^1 f(x)\,dx$ converge $\left(\frac{2}{3}<1\right)$

$\boxed{\text{Converge } \forall \alpha>0}$

$f_\alpha = \frac{(1-x)^\alpha}{\sqrt{x}-x}$ è ben definita e continua su $(0,1)$

$\boxed{x=0}$ $f_\alpha(x) \sim \left(\frac{1}{x}\right)^{1/2}$ e dunque $\int_0^{1/2} f(x)\,dx$

converge $\forall \alpha$

$\boxed{x=1}$ $f_\alpha(x) \sim \frac{2}{(1-x)^{1-\alpha}}$ dunque $\int_{1/2}^1 f\,dx$ converge <u>se</u> $1-\alpha<1$ <u>se</u> $\alpha>0$