Lezione marzo 38 – Ultima 2011

Titolo nota 10/12/2011

Sia data $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile nel punto x_0, ovvero

$$\exists \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

Allora

① $\exists \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h}$? e quanto vale?

$$\frac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h} = \frac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{2h} \cdot \frac{2h}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} 2f'(x_0)$$

② $\exists \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+3h)-f(x_0-h)}{3h}$? e quanto vale?

$\frac{3h-(-h)}{3h} = \frac{4}{3}$ dunque il risultato è $\frac{4}{3}f'(x_0)$

infatti

$$\frac{f(x_0+3h)-f(x_0-h)}{3h} = \frac{f(x_0+3h)-f(x_0)}{3h} + \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{3h}$$

$$= \frac{f(x_0+3h)-f(x_0)}{3h} + \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{-h} \cdot \frac{-h}{3h}$$

$$= \frac{f(x_0+3h)-f(x_0)}{3h} + \frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h} \cdot \frac{h}{3h}$$

$$\xrightarrow{h\to 0} f'(x_0) + \frac{1}{3}f'(x_0) = \frac{4}{3}f'(x_0)$$

3) $\exists \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+5h)-f(x_0-2h)}{3h}$? e quanto vale?

Risposta: $\exists$ e vale $\frac{7}{3}f'(x_0)$

1) Sia f : $[0,+\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(0) = 0$ e $f(x) \to -1$ per $x \to +\infty$. Allora:

(A) $\int_0^{+\infty} f = -\infty$; (B) $\int_0^{+\infty} f = -1$; (C) $\int_0^{+\infty} f = 0$; (D) non si può stabilire se f sia integrabile in senso generalizzato o no.

$f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continua

$f(0) = 0$ $\qquad \Longrightarrow \qquad \int_0^{+\infty} f(x)\,dx = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -1$

Per ipotesi

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M > 0$ t.c. $x \in]M, +\infty[\qquad -1-\varepsilon < f(x) < -1+\varepsilon$

Allora, fissato $\varepsilon = 1/10$

$\exists \overline{M} = M(1/10)$ t.c. $x \in]\overline{M}, +\infty[\qquad f(x) < -9/10 = -1 + 1/10$

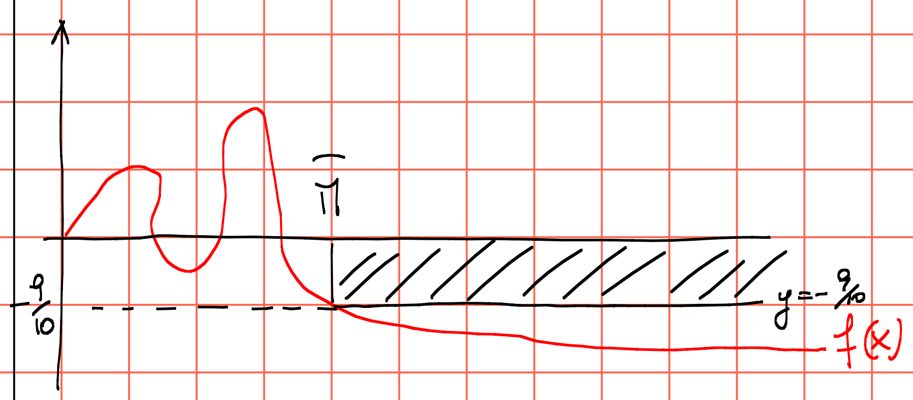
e dunque $\quad \int_{\overline{M}}^{\beta} f(x)\,dx < \int_{\overline{M}}^{\beta} -9/10\, dx = -\frac{9}{10}(\beta - \overline{M}) \quad \forall \beta > \overline{M}$

e dunque

$$\int_0^{\beta} f(x)\,dx < \int_0^{\overline{M}} f(x)\,dx - \frac{9}{10}(\beta - \overline{M}) \qquad \forall \beta > \overline{M}$$

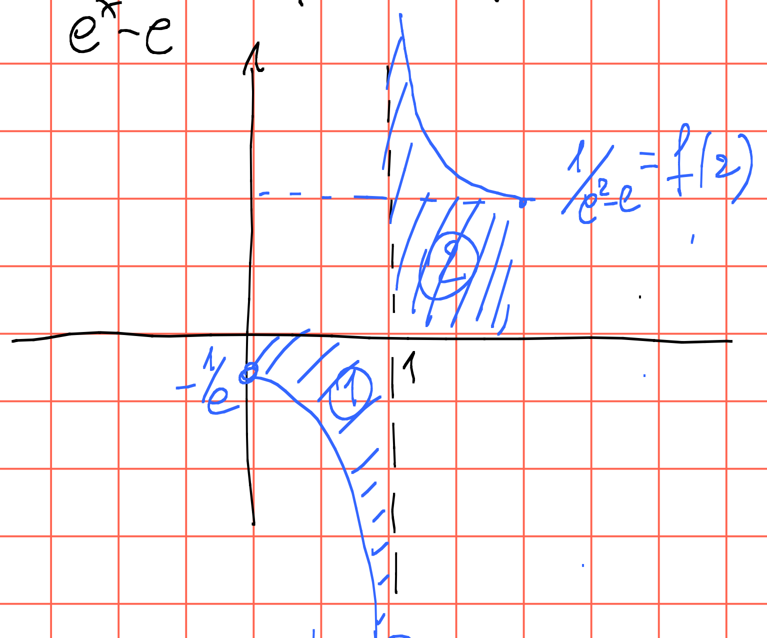
Passando al limite per $\beta \to +\infty$, tenendo conto che $\int_0^{\overline{M}} f(x)\,dx \in \mathbb{R}$, si ottiene

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx < -\infty \quad \Longrightarrow \quad \int_0^{+\infty} f(x)\,dx = -\infty$$



Studiare la convergenza di $\int_0^2 \frac{1}{e^x - e}dx$

$f(x) = \frac{1}{e^x - e}$ $\quad f(x)$ è definita $\forall x \in [0,2] \setminus \{1\}$



① < un numero finito oppure $-\infty$

② < un numero finito oppure $+\infty$

$$\int_0^2 f\,dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = ① + ②$$

L'integrale è indeterminato nel caso $-\infty + \infty$

L'integrale è convergente se i due risultati sono finiti

Negli altri casi l'integrale risulta divergente (positivamente o negativamente)

(1) $\int_0^1 \frac{1}{e^x - e}\,dx$

$f = \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{e^{x-1} - 1}$ è continua in $[0,1[$, ovvero presenta problemi in $x_0 = 1$. Quando $x \to 1$, $(x-1) \to 0$ dunque $e^{x-1} = 1 + (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$
$x \to 0$

dunque $f(x) = \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{(x-1) + o(x-1)}$ per $x \to 1$

dunque $f(x) \sim \frac{1}{e(x-1)}$ per $x \to 1$

Ma $\int_0^1 \frac{1}{e(x-1)}\,dx = -\infty$, quindi $\int_0^1 f(x)\,dx = -\infty$

(2) $\int_1^2 \frac{1}{e(e^{x-1} - 1)}\,dx$

$f = \frac{1}{e(e^{x-1} - 1)}$ è continua su $]1,2]$, dunque devo studiare il suo comportamento per $x \to x_0 = 1$. Sviluppando e^{x-1} come prima si ha

$f(x) = \frac{1}{e(x-1) + o(x-1)} \sim \frac{1}{e(x-1)}$ per $x \to 1$

Ma $\int_1^2 \frac{1}{e(x-1)}\,dx = +\infty$ e allora per il Teorema confronto asintotico per gli integrali impropri $\int_1^2 f(x)\,dx = +\infty$

Si conclude che $\int_0^2 f(x)\,dx$ è indeterminato $\lightning$

Teorema

$f : [c,d] \to \mathbb{R}$ e $\varphi : [a,b] \to [c,d]$

$[c,d] = [\varphi(a), \varphi(b)]$

φ invertibile con derivata continua

Allora $$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\,dy$$

$$[a,b] \xrightarrow{\varphi} [c,d] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$$\int_a^b (f\circ\varphi)(x)\cdot\varphi'(x)\,dx = \int_c^d f(y)\,dy$$

Studiare la convergenza di $\displaystyle\int_0^{\pi^2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\cos\sqrt{x}\,dx$

$f(x) = \left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\cos\sqrt{x}$ è continua $\forall x \in]0, \pi^2]$

quando $x \to 0$ $\quad f(x) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \cos\sqrt{x} \sim \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \sim -\frac{1}{\sqrt{x}}$

infatti, $\quad \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{-1/\sqrt{x}} = 1$ (calcolarlo a casa)

$\int_0^{\pi^2} f(x)\,dx$ si comporta come $\int_0^{\pi^2} -\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

ma questo CONVERGE

Infatti, $\boxed{\int_0^{l} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \text{ converge per } \alpha < 1}$

Quindi, per il teorema confronto asintotico degli integrali impropri converge anche l'integrale di partenza, ovvero

$$\int_0^{\pi^2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \cos\sqrt{x}\,dx \in \mathbb{R}$$

Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza

di $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{arctg x}{(x^2+1)^\alpha \cdot x^{3\alpha}}\, dx$

$f(x)$ è continua $\forall x \in \,]0, +\infty[$

dunque devo studiare l'andamento di f in

$\boxed{x=0}$ e $\boxed{x=+\infty}$

ovvero devo studiare

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \underbrace{\int_0^{10^4} f(x)\,dx}_{1} + \underbrace{\int_{10^4}^{+\infty} f(x)\,dx}_{2}$$

1 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$

$x \to 0$

$$f(x) = \frac{arctg\, x}{(x^2+1)^\alpha\, x^{3\alpha}} = \frac{x + o(x)}{(x^2+1)^\alpha \cdot x^{3\alpha}} \sim \frac{1}{x^{3\alpha-1}}$$

Provare che $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{1/x^{3\alpha-1}} = 1$ (x casa)

Per il teorema del confronto asintotico

$\displaystyle\int_0^{10^4} f(x)\,dx$ converge se $\displaystyle\int_0^{10^4} \frac{dx}{x^{3\alpha-1}}$ converge

$\iff \quad 3\alpha - 1 < 1$

$\iff \quad 3\alpha < 2$

$\iff \quad \boxed{\alpha < 2/3}$

(2) $\displaystyle\int_{10^4}^{+\infty} f(x)\,dx$

$f(x)$ per $x \to +\infty$ come fa?

$$f(x) = \frac{\arctan x}{(x^2+1)^\alpha \cdot x^{3\alpha}}$$

Quando $x \to +\infty$

$\arctan x \sim \pi/2$

$x^{3\alpha} \sim x^{3\alpha}$

$(x^2+1)^\alpha \sim x^{2\alpha}$

Dunque $f(x) \sim \dfrac{\pi/2}{x^{2\alpha} x^{3\alpha}} = \dfrac{\pi/2}{x^{5\alpha}}$ per $x \to +\infty$

Infatti $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\frac{\pi}{2x^{5\alpha}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\arctan x}{(x^2+1)^\alpha \cdot x^{3\alpha}} \cdot \frac{x^{5\alpha}}{\pi/2}$

$\displaystyle = \lim_{x \to +\infty} \frac{\arctan x}{\pi/2} \cdot \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{2\alpha}}{(x^2+1)^\alpha} \cdot \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{3\alpha}}{x^{3\alpha}}$

$= 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

Per il Teorema del confronto asintotico per gli integrali impropri si ha che

$\int_{10^4}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge $\underline{\text{se}}$ $\int_{10^4}^{+\infty} \frac{\pi/2}{x^{5\alpha}}\,dx$ converge

$\underline{\text{se}}$ $\int_{10^4}^{+\infty} \frac{dx}{x^{5\alpha}}$ converge $\underline{\text{se}}$ $5\alpha > 1$ $\underline{\text{se}}$ $\alpha > 1/5$

Dunque

$\int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge $\underline{\text{se}}$ $\int_{0}^{10^4} f(x)\,dx$ e $\int_{10^4}^{+\infty} f(x)\,dx$ convergono

$\underline{\text{se}}$ $\alpha < \frac{2}{3}$ e $\alpha > 1/5$

$\underline{\text{se}}$ $1/5 < \alpha < 2/3$ $\swarrow$

$f(x)=e^x \quad f'(x)=e^x=f(x)=f''=f'''\ \cdots$

$$\begin{cases} f(x)=\operatorname{sen}x & f'=\cos x \quad f''=-\operatorname{sen}x \quad f'''=-\cos x \quad f^{IV}=\operatorname{sen}x \\ f(x)=\cos x & f'=-\operatorname{sen}x \quad f''=-\cos x \quad f'''=\operatorname{sen}x \quad f^{IV}=\cos x \end{cases}$$

$$f(x)=e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}$$

$$\cos x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\operatorname{sen}x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$x\in\mathbb{R}\quad e^{ix}=\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ix)^{2k}}{(2k)!}}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ix)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$=\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\right)$$

$$+\left\{i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(i)^{2k}\cdot x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right\}$$

$$(i)^{2k}=\left[(i)^2\right]^k=(-1)^k$$

$$=\cos x+i\left\{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right\}$$

$$=\cos x+i\operatorname{sen}x$$

$$e^{ix}=\cos x+i\operatorname{sen}x \qquad e^{-ix}=\cos x-i\operatorname{sen}x$$

- $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

- $\operatorname{sen} x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

$$\boxed{e^{i\pi} = -1}$$

Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza

di $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{e^x - e^2} \cdot (x-2)^\alpha}$

$f(x) = \dfrac{1}{e\left(e^{x-2}-1\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot \dfrac{1}{(x-2)^\alpha}$ continua su $]2, +\infty[$

quindi debbo studiare $f(x)$ in $\boxed{2}$ e $\boxed{+\infty}$.

ovvero $\displaystyle\int_2^{+\infty} f\,dx = \int_2^{10} f(x)dx + \int_{10}^{+\infty} f(x)dx = (1) + (2)$

(1) $\displaystyle\int_2^{10} f(x)dx$ per $x \to 2$, $(x-2) \to 0$ perciò

$f(x) = \dfrac{1}{e\left(1 + (x-2) + o(x-2) - 1\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot \dfrac{1}{(x-2)^\alpha}$

$= \dfrac{1}{e} \cdot \dfrac{1}{\left[(x-2) + o(x-2)\right]^{\frac{1}{2}}} \cdot \dfrac{1}{(x-2)^\alpha} \sim \dfrac{1}{e} \cdot \dfrac{1}{(x-2)^{\alpha + \frac{1}{2}}}$

quando $x \to 2$

Dunque $\displaystyle\int_2^{10} f(x)\,dx$ converge, per il teorema

Confronto con l'integrale improprio,

$$\int_2^{10} \frac{dx}{e(x-2)^{\alpha+1/2}} \text{ converge}$$

<u>sse</u> $\alpha + \frac{1}{2} < 1$

<u>sse</u> $\alpha < \frac{1}{2}$

② $\int_{10}^{+\infty} f(x)\,dx$

In questo caso si deve studiare $f(x)$ quando $x \to +\infty$

$$f(x) = \frac{1}{(e^x - e^2)^{1/2} \cdot (x-2)^\alpha} \sim \frac{1}{e^{x/2} \cdot x^\alpha} \quad x \to +\infty$$

Per il criterio confronto con l'integrale improprio, $\int_{10}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge

<u>sse</u> $\int_{10}^{+\infty} \frac{dx}{e^{x/2} \cdot x^\alpha}$ converge

Proviamo che quest'ultimo integrale converge $\forall \alpha$ osservando che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{e^{x/2} x^\alpha}}{1/x^2} = 0 \quad \forall \alpha > 0$$

Infatti $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{2-\alpha}}{e^{x/2}} = 0 \quad \forall \alpha\in\mathbb{R}$

Se $\alpha \geq 2$ ovvio

Se $\underset{1}{\alpha \underset{\leq}{<} 2}$ allora $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{2-\alpha}}{e^{x/2}} \overset{\text{Hospital}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(2-\alpha)\,x^{1-\alpha}}{\frac{1}{2}e^{x/2}} = 0$

Se $0\leq\alpha<1$ allora ---

In generale abbiamo già provato $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^k} = +\infty$ $\forall k\in\mathbb{R}$

Ma $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{x/2}x^\alpha}\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right)^{-1} = 0$ implica

$$\exists M>0 : \frac{1}{e^{x/2}x^\alpha} \leq \frac{1}{x^2} \quad \forall x>M$$

Ma $\int_M^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ converge e quindi, per il (primo) teorema confronto con l'integrale improprio si ha che anche $\int_M^{+\infty}\frac{dx}{e^{x/2}x^\alpha}$ converge $\forall\alpha$

e dunque $\int_{10}^{+\infty}\frac{dx}{e^{x/2}x^\alpha}$ converge $\forall\alpha$

e dunque $\int_{10}^{+\infty} f(x)dx$ converge $\forall\alpha$

Si conclude che $\int_2^{+\infty} f(x)dx$ converge <u>sse</u> $\alpha<\frac{1}{2}$

④ Posto $a_n = \int_{n^3}^{(\sqrt{1+n^2})^3} \frac{1}{x}\,dx$, studiare

$\sum_n (a_n)^\alpha$

$$a_n = \left[\log x\right]_{x=n^3}^{x=(\sqrt{1+n^2})^3} =$$

$$= \log\left[(1+n^2)^{3/2}\right] - \log\left[n^3\right]$$

$$= \frac{3}{2}\log(1+n^2) - \frac{3}{2}\log(n^2)$$

$$= \frac{3}{2}\log\left(\frac{1+n^2}{n^2}\right) = \frac{3}{2}\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$$

Quindi

$$a_n \sim \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{n^2} \qquad n \to +\infty$$

Infatti $\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{3}{2}\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{3}{2}\cdot 1/n^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{3}{2}\log(1+x)}{\frac{3}{2}x} = 1$

Ma c'è un Teorema, del confronto asintotico tra serie, che afferma

$a_n^\alpha \sim \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{n^{2\alpha}}$ $n \to +\infty$ allora

$$\sum_n a_n^\alpha \sim \sum_n \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{n^{2\alpha}}$$

ovvero $\sum_n e_n^{\alpha}$ converge se $\sum_n \frac{3}{2n^{2\alpha}}$ converge

se $2\alpha > 1$

se $\alpha > 1/2$

(5) Calcolare tutte le primitive di $f(x) = \dfrac{\operatorname{arctg} 1/x}{x^2}$

Calcolare $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\,dx$

<u>1° passo</u> verif. che $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge

Immediato $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{1/x^3} = 1$, ovvero $f(x) \sim \frac{1}{x^3}$ per $x \to +\infty$

ed essendo $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$ convergente, per il

criterio confronto asintotico integrali impropri

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,dx \text{ converge.}$$

2) Calcolo primitive $f(x) = \dfrac{\operatorname{arctg} 1/x}{x^2}$

$$\int \frac{\operatorname{arctg} 1/x}{x^2}\,dx \underset{y=1/x}{=} \left(\int y^2 \cdot \operatorname{arctg} y \cdot \left(-\frac{dy}{y^2}\right)\right)_{y=1/x}$$

$x = 1/y$

$\dfrac{dx}{dy} = -\dfrac{1}{y^2}$ ovvero $dx = -\dfrac{dy}{y^2}$

$$= \left(-\int \operatorname{arctg} y\,dy\right)_{y=1/x} = \left(-y \operatorname{arctg} y + \frac{1}{2}\log(1+y^2) + c\right)_{y=1/x}$$

$$= -\frac{1}{x}\operatorname{arctg} 1/x + \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right) + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$\int \underset{u}{\operatorname{arctg} y}\,\underset{v}{dy} = y \operatorname{arctg} y - \int \underset{u}{y} \cdot \underset{v'}{\frac{1}{1+y^2}}\,dy = y \operatorname{arctg} y - \frac{1}{2}\int \frac{2y}{1+y^2}\,dy$$

$$= y \arctan y - \frac{1}{2}\log(1+y^2) + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\beta\to+\infty}\left[-\frac{1}{x}\arctan\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]_{x=1}^{x=\beta}$$

$$= \arctan 1 - \frac{1}{2}\log 2 = \pi/4 - \log 4$$

$$a_n = \int_n^{+\infty} f(x)\,dx = \left[-\frac{1}{x}\arctan\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]_n^{+\infty}$$

$$a_n = \frac{1}{n}\arctan\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{quando } n\to+\infty$$

Dunque $a_n^\alpha \sim \dfrac{1}{2^\alpha n^{2\alpha}}$ per $n\to+\infty$

e per il Teorema confronto asintotico tra serie si ha che

$\sum_n a_n^\alpha$ converge se $\sum_n \dfrac{1}{2^\alpha n^{2\alpha}}$ converge

se $2\alpha > 1$

se $\alpha > 1/2$

(6) Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^\alpha} = 1$$

Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza di

$$\sum_n \left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^\alpha} - 1\right]$$

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^\alpha} = \left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{n^{\alpha-2}} \leq e^{n^{\alpha-2}}$$

e se $\alpha - 2 < 0$ allora $e^{n^{\alpha-2}} \longrightarrow 1$

$$\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^\alpha} - 1\right] = e^{n^\alpha \log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} - 1 \qquad (\alpha - 2 < 0)$$

$$= e^{n^{\alpha-2} + o(n^{\alpha-2})} - 1 = 1 + \left[n^{\alpha-2} + o(n^{\alpha-2})\right] - 1$$

$$= n^{\alpha-2} + o(n^{\alpha-2})$$

ovvero $a_n \sim n^{\alpha-2}$ per cui la serie

converge se $2-\alpha > 1$ se $1 > \alpha$

(7) Sia $a_n = \int_{5+\frac{16}{n^\alpha}}^{5} f(x)\,dx \qquad f = \frac{1}{\sqrt[4]{5-x}} + \sqrt{5-x}$

Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza di

$$\sum_n a_n$$

$$\int f(x) = \int \frac{1}{\sqrt[4]{5-x}}\,dx + \int \sqrt{5-x}\,dx$$

$-dx = dy$
$5-x = y$

$$= -\left[\int \frac{1}{\sqrt[4]{y}}\,dy + \int \sqrt{y}\,dy \right]$$

$$= -\left[\frac{4}{3} y^{3/4} + \frac{2}{3} y^{3/2} + c \right]_{y = 5-x} =$$

$$= -\frac{4}{3}(5-x)^{3/4} \cancel{-} \frac{2}{3}(5-x)^{3/2} + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$a_n = \int_{5-\frac{16}{n^\alpha}}^{5} - = \frac{4}{3}\left(\frac{16}{n^\alpha}\right)^{3/4} + \frac{2}{3}\left(\frac{16}{n^\alpha}\right)^{3/2}$$

$$= k \cdot \frac{1}{n^{\frac{3}{4}\alpha}} + o(\ )$$

$\sum a_n$ converge se $\frac{3}{4}\alpha > 1$ se $\alpha > \frac{4}{3}$

Fine

Auguri di Buon Anno