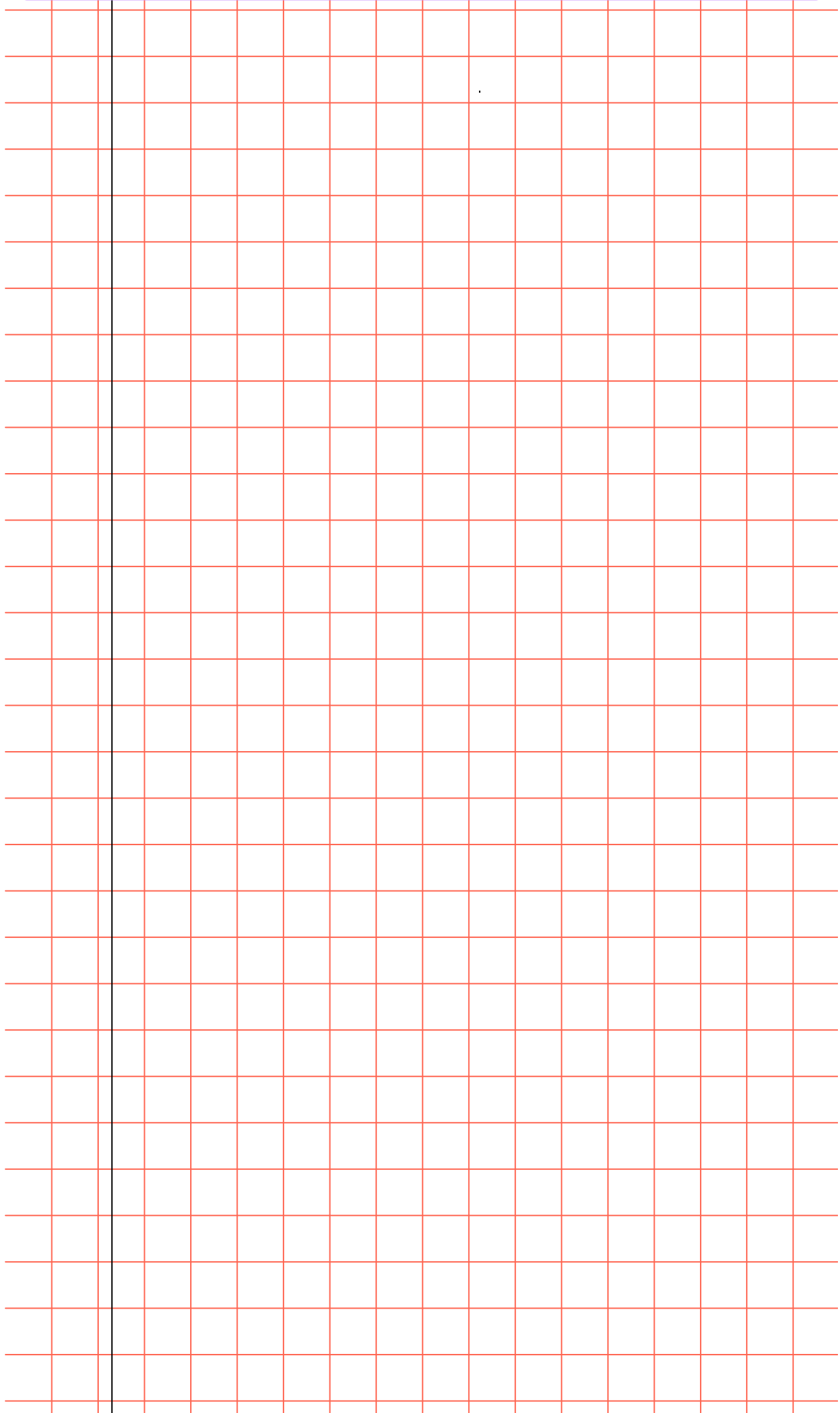


Lezione n° 37

Titolo nota

10/12/2011



② a) Calcolare tutte le primitive di $f(x) = x \cdot 2^{-x^2}$

b) posto $a_n = \int_{\sqrt{n}}^{\sqrt{n+1}} f(x) dx$, calcolare la somma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ di $\sum_n a_n$

$$a) f(x) = x \left(e^{\log 2} \right)^{-x^2} = x e^{-x^2 \log 2} = -(x) e^{-x^2 \log 2}$$

$$= \left(-\frac{1}{2 \log 2} \right) \cdot \left(-2 \log 2 \cdot x e^{-x^2 \log 2} \right)$$

$$= -\frac{1}{2 \log 2} \cdot \frac{d}{dx} \left(e^{-x^2 \log 2} \right)$$

$$\int f(x) dx = \int -\frac{1}{2 \log 2} \frac{d}{dx} \left(e^{-x^2 \log 2} \right) dx =$$

$$= -\frac{1}{2 \log 2} e^{-x^2 \log 2} + c \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\int x e^{-x^2 \log 2} dx = \left(\int e^y \left(-\frac{dy}{2 \log 2} \right) \right)_{y=-x^2 \log 2}$$

$$y = -x^2 \log 2$$

$$dy = -2x \log 2 dx$$

$$\frac{dy}{-2 \log 2} = x dx$$

$$= \left(-\frac{1}{2 \log 2} \int e^y dy \right)_{y=-x^2 \log 2}$$

$$= \left(-\frac{e^y}{2 \log 2} + c \right)_{y=-x^2 \log 2}$$

$$= -\frac{e^{-x^2 \log 2}}{2 \log 2} + c \quad c \in \mathbb{R}$$

$$Q_m = \int_{\sqrt{m}}^{\sqrt{2m}} f(x) dx = \left[-\frac{e^{-x^2 \log 2}}{2 \log 2} \right]_{x=\sqrt{m}}^{x=\sqrt{2m}} =$$

$$= \frac{e^{-m \log 2}}{2 \log 2} - \frac{e^{-2m \log 2}}{2 \log 2}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} Q_m = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{e^{-m \log 2}}{2 \log 2} - \frac{e^{-2m \log 2}}{2 \log 2} \right)$$

$$= \frac{1}{\log 4} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \left(e^{-\log 2} \right)^m - \sum_{m=0}^{\infty} \left(e^{-\log 4} \right)^m \right\}$$

$$= \frac{1}{\log 4} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^m - \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4} \right)^m \right\}$$

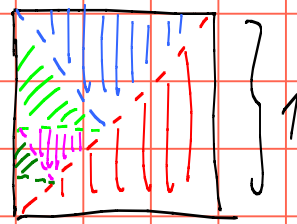
$$= \frac{1}{\log 4} \cdot \left\{ 2 - \frac{4}{3} \right\} = \frac{2}{\cancel{2} \log 2 \cdot 3} = \frac{1}{\log 8}$$



Ricorda $\sum_{m=0}^{\infty} q^m = \frac{1}{1-q} \text{ se } |q| < 1$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^m = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^m = 1$$



$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^m = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots = 1$$

③ a) Calcola tutte le primitive di $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

b) Calcola $\int_4^{+\infty} e^{\sqrt{x}} dx$

$$a) \int e^{\sqrt{x}} dx = \left(\int e^y \cdot 2y dy \right)_{y=\sqrt{x}} \quad \begin{array}{l} x=y^2 \\ dx=2y dy \end{array}$$

$$= \left(2 \int y e^y dy \right)_{y=\sqrt{x}}$$

$$= \left(2 y e^y - 2 \int 1 \cdot e^y dy \right)_{y=\sqrt{x}}$$

$$= (2 y e^y - 2 e^y + c)_{y=\sqrt{x}}$$

$$= 2\sqrt{x} e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + c \quad c \in \mathbb{R}$$

b) $\int_4^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$ studiare la convergenza e calcolarlo esplicitamente

$f(x) = e^{-\sqrt{x}}$ è continua su $[4, +\infty[$

Quindi studio f in un intorno di $+\infty$

cioè quando $x \rightarrow +\infty$

$$f = \frac{1}{e^{\sqrt{x}}}$$

$$e^{\sqrt{x}} > 1 + \sqrt{x}$$

$$e^{\sqrt{x}} = \left(e^{\frac{\sqrt{x}}{2}}\right)^2 > \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2$$

$$e^{\sqrt{x}} = \left(e^{\frac{\sqrt{x}}{3}}\right)^3 \geq \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{3}\right)^3 = 1 + \sqrt{x} + \frac{x}{3} + \frac{x^{3/2}}{27}$$

$$e^{\sqrt{x}} \geq \frac{x^{3/2}}{27}$$

$$\frac{1}{e^{\sqrt{x}}} \leq \frac{27}{x^{3/2}} \quad \forall x \geq 4$$

$$\int_4^{+\infty} \frac{27}{x^{3/2}} dx < +\infty$$

the comparison integrand is improper

$$\Rightarrow \int_4^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx < +\infty$$

ovvero l'integrale converge

$$\int e^{-\sqrt{x}} dx = \int_{y=-\sqrt{x}} e^y \cdot (2y dy) \Big|_{y=-\sqrt{x}}$$

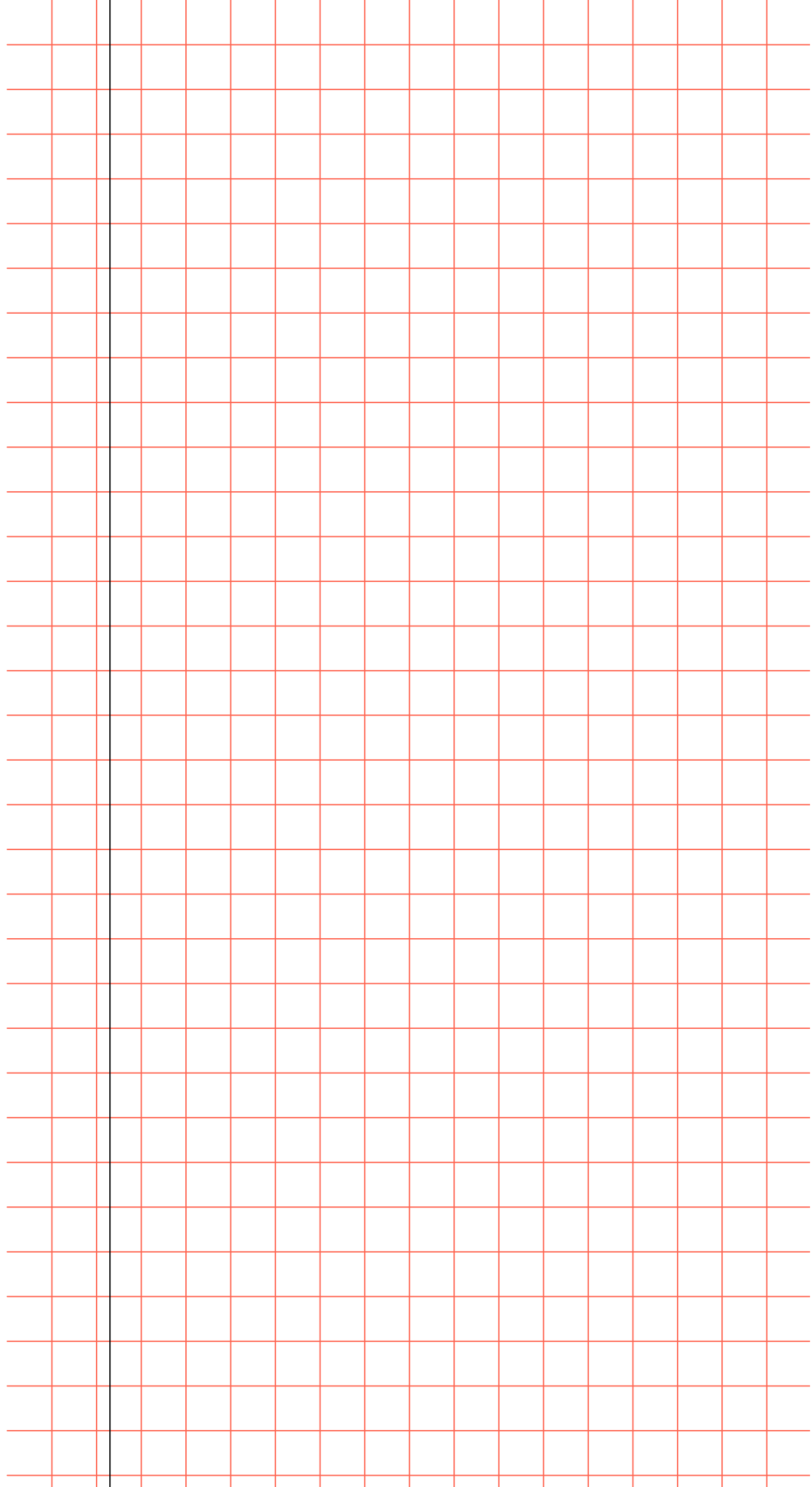
$x = y^2$
 $dx = 2y dy$

$$= \left(2ye^y - 2e^y + C \right) \Big|_{y=-\sqrt{x}} = -2\sqrt{x}e^{-\sqrt{x}} - 2e^{-\sqrt{x}} + C$$

$C \in \mathbb{R}$

$$\int_4^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx = \left[-2\sqrt{x}e^{-\sqrt{x}} - 2e^{-\sqrt{x}} \right]_{x=4}^{x=+\infty}$$

$$= 4e^{-2} + 2e^{-2} = 6/e^2$$



Quando s'era provata la continuità della funzione
inverso, s'era considerato

s'era dimostrato

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$ strett. crescente continua su l'intervallo
e s'è posto

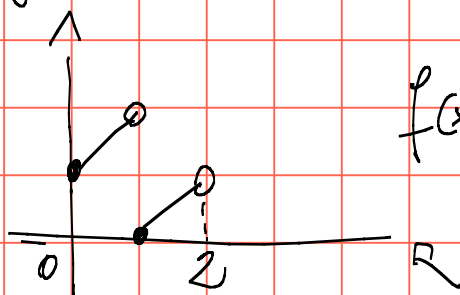
$\exists f^{-1}: f(I) \rightarrow I$ strett. crescente e continua su $f(I)$ intervallo

Avevo bisogno di avere "l'esistenza"
della funzione inversa, e per questo
mi serviva l'injectività di f
Se $f \nearrow$ allora f injectiva !!!

Attenzione per avere f injective, non

ho bisogno di avere $f \nearrow$ (o $\searrow$) !!

infatt.



$$f(x) = \begin{cases} 1+x & 0 \leq x < 1 \\ -1+x & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

$f: [0, 2] \rightarrow [0, 2]$ è invertibile

MA NON È MONOTONA !!

Ma se f non è né iniettiva né continua?

f continua $\nexists$ iniettiva
in un intervallo

allora

f è monotona

Osserviamo che f monotona crescente (decrescente)

$\Downarrow$
 f iniettiva

$$x \neq y \Leftrightarrow \begin{cases} x < y \Rightarrow f(x) < f(y) \\ x > y \Rightarrow f(x) > f(y) \end{cases} \Rightarrow f(x) \neq f(y) \quad \swarrow$$

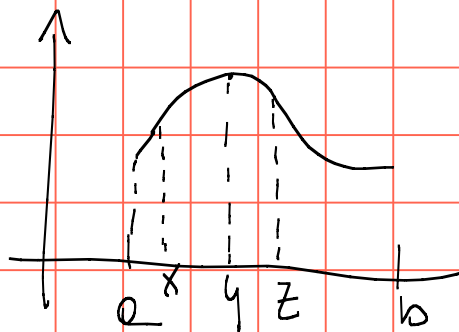
Proviamo il viceversa!

Teorema $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continua
in un intervallo
 f iniettiva (impossibile
su $f(I)$)

Allora f è monotona
(crescente o decrescente)

dim

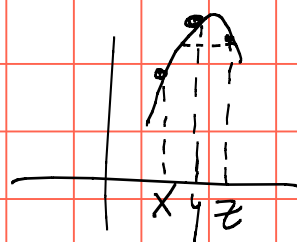
esempio f non è monotona su I



Allora $\exists x, y, z \in I$ s.c.

$$x < y < z \quad \& \quad f(x) < f(y) \quad \& \quad f(z) < f(y)$$

① caso $f(x) < f(z) < f(y)$



Per il Teorema dei valori intermedi,

$f : [x, y] \rightarrow \mathbb{R}$ assume tutti i valori compresi tra $f(x)$ e $f(y)$

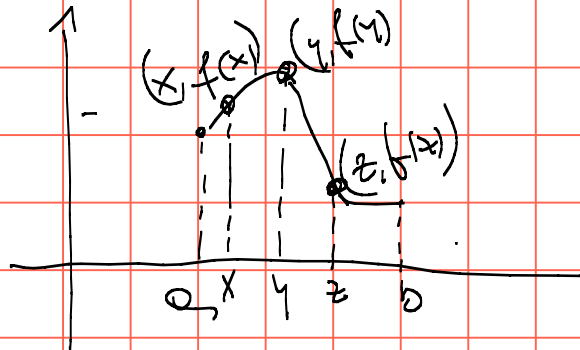
ovvero $\exists c \in [x, y] : f(c) = f(z)$

Ma $c \neq z$ ($z \notin [x, y]$)

Ma allora $f(c) = f(z)$ con $c \neq z$

ovvero f non è iniettiva Assurdo

2° caso $f(z) < f(x) < f(y)$



$$f(z) < f(x) < f(y)$$

Ma la funzione $f: [y, z] \rightarrow \mathbb{R}$ soddisfa

il Teorema dei valori intermedi e quindi

$$\exists c \in [y, z] \text{ t.c. } f(c) = f(x)$$

ma $x \notin [y, z]$ dunque $\exists c \neq x$ t.c. $f(c) = f(x)$

Allora f non è iniettiva. **Arrosto** ⚡

SUCCESSIONI definite per ricorrenza

Esempio

$$\begin{cases} Q_0 = 1 \\ Q_{n+1} = \frac{1}{2} \left(Q_n + \frac{2}{Q_n} \right) \end{cases}$$

$$Q_0 = 1 \quad Q_1 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{1} \right) = \frac{3}{2} \quad Q_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{17}{6} = \frac{17}{12}$$

• $Q_n \in \mathbb{Q} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

• se $\exists$ il limite $\neq 0 \in \mathbb{R}$ allora

$$Q_{n+1} = \frac{1}{2} \left(Q_n + \frac{2}{Q_n} \right)$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow \quad \downarrow$$
$$l = \frac{1}{2} \left(l + \frac{2}{l} \right)$$

$$2l = l + \frac{2}{l}$$

$$2l^2 = l^2 + 2$$

$$\boxed{l^2 = 2}$$

$$l = \pm \sqrt{2}$$

1^a proprietà

$$\boxed{Q_n > \sqrt{2} \quad \forall n \geq 1}$$

$$Q_1 = \frac{3}{2} > \sqrt{2} \quad \checkmark$$

Hip. induttiva $Q_n > \sqrt{2}$

$\S$ $Q_{n+1} > \sqrt{2}$

$$Q_{n+1} = \frac{1}{2} \left(Q_n + \frac{2}{Q_n} \right) > \sqrt{2}$$

ne

$$Q_n + \frac{2}{Q_n} > 2\sqrt{2}$$

ne

$$Q_n + 2 > 2\sqrt{2} Q_n$$

ne

$Q_n > 0$

$$(Q_n - \sqrt{2})^2 > 0 \quad \text{che \u00e9 vero poich\u00e9}$$

per ipotesi induttiva $Q_n > \sqrt{2}$

2^a prop. Q_n monotona decrescente $\forall n \geq 1$

$$Q_2 = \frac{17}{12} \leq \frac{3}{2} = Q_1 \quad (\text{base induttiva})$$

Se possiamo (Hip. induttiva) $Q_n \leq Q_{n-1}$

$$\frac{1}{2} \left(Q_{n-1} + \frac{2}{Q_{n-1}} \right)$$

$\S$ $Q_{n+1} \leq Q_n$

$$Q_{n+1} = \frac{1}{2} \left(Q_n + \frac{2}{Q_n} \right) \leq Q_n$$

ne

$$Q_n + \frac{2}{Q_n} \leq 2Q_n$$

ne

$$Q_n^2 + 2 \leq 2Q_n^2$$

ne

$$2 \leq Q_n^2$$

$$\boxed{Q_n > \sqrt{2}}$$

è vero poiché $Q_n \geq \sqrt{2} !!$

• Q_n è limitata inferiormente da $\sqrt{2} \quad \forall n \geq 1$

• Q_n è monotona decrescente

$$\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n = l = \inf_{n \geq 1} Q_n$$

$$Q_{n+1} = \frac{1}{2} \left(Q_n + \frac{2}{Q_n} \right)$$

$\downarrow n \rightarrow +\infty$

$\downarrow n \rightarrow +\infty$

$$l = \frac{1}{2} \left(l + \frac{2}{l} \right) \Leftrightarrow l^2 = 2 \Rightarrow \boxed{l = \sqrt{2}}$$

Q_m se voglio calcolare $\sqrt{\alpha}$, $\alpha > 0$
la successione

$$\begin{cases} Q_0 = 1 \\ Q_{m+1} = \frac{1}{2} \left(Q_m + \frac{\alpha}{Q_m} \right) \end{cases}$$

è tale che $Q_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \sqrt{\alpha}$

Radici Terze

$$\begin{cases} Q_0 = 1 \\ Q_{m+1} = \frac{1}{2} \left(Q_m + \frac{2}{Q_m^2} \right) \end{cases}$$

questa successione $Q_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \sqrt[3]{2}$

in generale la successione

$$\begin{cases} Q_0 = 1 \\ Q_{m+1} = \frac{1}{2} \left(Q_m + \frac{\alpha}{Q_m^2} \right) \end{cases}$$

converge a $\sqrt[3]{\alpha}$, cioè $Q_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\alpha}$

Più in generale, preso $k > 0$, $k \in \mathbb{N}$, la

successione

$$\begin{cases} Q_0 = 1 \\ Q_{m+1} = \frac{1}{2} \left(Q_m + \frac{\alpha}{Q_m^{k-1}} \right) \end{cases}$$

converge a $\sqrt[k]{\alpha}$
cioè

$$Q_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\alpha}$$