Lezione nro 34

Titolo nota 10/12/2011

$f: I \to \mathbb{R}$ I intervallo, $L > 0$

f è Lipschitziana con costante L se

$$|f(x) - f(y)| \leq L\, |x-y| \quad \forall x, y \in I$$

Oss $\forall x, y \in I$ $x \neq y$ (nel caso $x = y$ tutte le funzioni son lipschitziane)

Def eq. f è L-Lipschitziana su I se $\forall x, y \in I$ $x \neq y$

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} \leq L$$

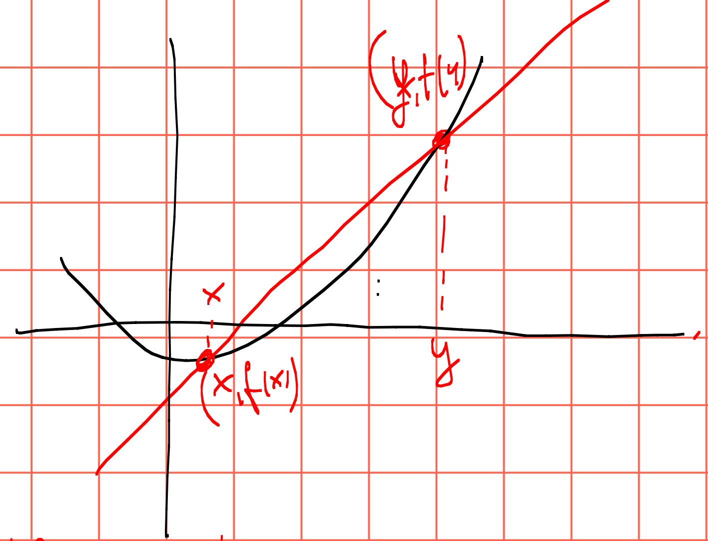
Def eq. f è L-Lipschitziana su I se

$$\boxed{\sup_{\substack{x,y \in I \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|}} \leq L$$

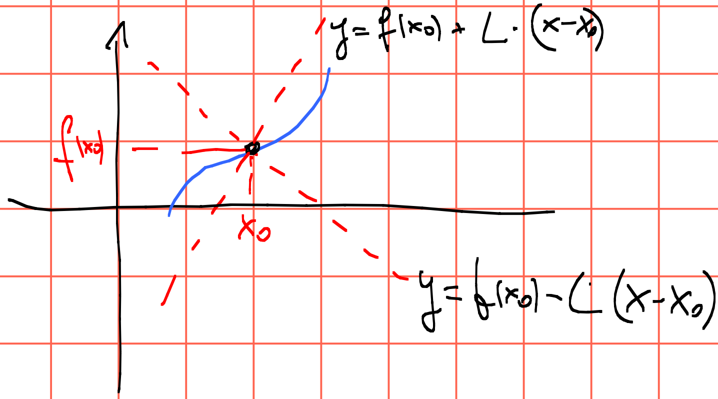
Oss f Lipschitziana $\not\Rightarrow$ f derivabile

infatti $f(x) = |x|$ è 1-Lipschitziana su $\mathbb{R}$

ma $f(x) = |x|$ non è derivabile in $x = 0$



$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} = \text{pendenza retta per } (x, f(x)) \text{ e } (y, f(y)) \leq L$$



Teorema

$f : I \to \mathbb{R}$ $\boxed{\text{derivabile con derivata continua}}$

$\left(\text{ovvero } f \in C^1(I)\right)$

$\boxed{I \text{ chiuso e limitato}}$

allora f è Lipschitziana con costante

(minima) $\quad L = \max\limits_{x \in I} |f'(x)|$

Oss Se f è L-Lipschitziana su I

allora f è M-Lipschitziana su I

$\forall M > L$

Hp $\begin{cases} \sup\limits_{\substack{x,y \in I \\ x \neq y}} \dfrac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \leq L \\ L < M \end{cases}$

Th $\sup\limits_{\substack{x,y \in I \\ x \neq y}} \dfrac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \leq M$

Esempio $f(x) = |x|$ $\qquad |x-y| \leq |x-y|$

ovvero è 1-Lipschitziana

$\Rightarrow \quad |x-y| \leq 2\,|x-y|$

L'interesse, per noi, è nel determinare la "minima costante" dim $\left(f \in C^1(I)\ I \text{ chiuso e limitato} \Rightarrow f \text{ Lip.} \right)$

$f' : I \to \mathbb{R}$ ed è continua, I chiuso e limitato $\Rightarrow$ (per il Teorema Weierstrass)

$\exists\, x_M$ e $x_m \in I$ t.c.

$$f'(x_m) = \min_{x \in I} f'(x) \qquad f'(x_M) = \max_{x \in I} f'(x)$$

$$\Rightarrow |f'(x)| \le \max\left\{ \left|\min_{x \in I} f'(x)\right|, \left|\max_{x \in I} f'(x)\right| \right\}$$

$$\Rightarrow |f'(x)| \le \max_{x \in I} |f'(x)| = L \qquad \forall x \in I$$

Quindi la derivata prima è limitata

Suppongo $x<y$: Applico Teorema Lagrange a f su $[x,y]$ e quindi $\exists\, z \in]x,y[$ t.c. ...

$$|f(x) - f(y)| = |f'(z)(x-y)|$$

$$= |f'(z)| \cdot |x-y| \quad \text{modulo prodotto} = \text{prodotto moduli}$$

$$\le \left(\max_{z \in I} |f'(z)| \right) \cdot |x-y|$$

$$= L \cdot |x-y| \qquad \forall x,y \in I$$

ovvero $|f(x) - f(y)| \le L \cdot |x-y| \quad \forall x,y \in I$

Ma $L = \max |f'|$ è "la più piccola" costante, ovvero

$$\sup_{\substack{x,y \in I \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} = L$$

Abbiamo provato che $\displaystyle\sup_{\substack{x \neq y \\ x,y \in I}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} \leq L$

ovvero L è un maggiorante. Se deve essere il minimo dei maggioranti deve aversi

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_\varepsilon y_\varepsilon \in I \ : \ L - \varepsilon < \frac{|f(x_\varepsilon) - f(y_\varepsilon)|}{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|}$$

Ma si osserva che, per il Teorema di Lagrange

$$\frac{|f(x_\varepsilon) - f(y_\varepsilon)|}{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|} = \frac{|f'(z_\varepsilon)(x_\varepsilon - y_\varepsilon)|}{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|}$$

$$= \frac{|f'(z_\varepsilon)| \cdot \cancel{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|}^{1}}{\cancel{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|}_{1}} = |f'(z_\varepsilon)|$$

Ovvero ci si riduce a provare che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists z_\varepsilon \in I \ : \ L - \varepsilon < f'(z_\varepsilon)$$

Ma questo è vero poiché, per il Teorema dei valori intermedi applicato alla funzione continua $|f'(x)|$, questa assume tutti i valori compresi tra $\min_I |f'(x)|$ e $\max_I |f'(x)| = L$

Legame tra Lipschitzianità e derivabilità

Teorema $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile $\forall x \in I$

f Lipschitziana $\iff$ $f'(x)$ limitata su I

dim

$\Leftarrow$ Questa è immediata

f' limitata $\Rightarrow \sup_{x \in I} |f'(x)| = L \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow |f(x) - f(y)| = \underset{z \in I}{|f'(z)(x-y)|} \leq \sup_{x \in I} |f'(x)| \cdot |x-y|$$

ovvero $|f(x) - f(y)| \leq L\,|x-y| \quad \forall x, y \in I$

$\Rightarrow$ f Lipschitziana su I

$$\Rightarrow \forall x \neq y \quad \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} \leq L$$

ma f è derivabile

$\Rightarrow f'(x) \leq L \quad \forall x \in I$ $\lightning$

Esercizio

$f(x) = \frac{1}{x}$ è Lipschitziana su $[1, 4]$?

e quale è la più piccola costante di Lipschitz?

$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ che è continua su $[1,4]$

$\Rightarrow f = \frac{1}{x}$ è Lipschitziana su $[1,4]$

Quale è la minima costante?

$$L = \max_{x \in [1,4]} \left| -\frac{1}{x^2} \right| = \max_{x \in [1,4]} \frac{1}{x^2} = 1$$

poiché $\frac{1}{x^2}$ è monotona decrescente

Esercizio

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \operatorname{sen} x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

è lipschitziana su $\mathbb{R}$?

NO: Infatti in $x=0$ ho problemi

$$\frac{|f(x) - f(0)|}{|x - 0|} = \frac{\frac{1}{x^2} |\operatorname{sen} x|}{x} = \frac{|\operatorname{sen} x|}{x^3} \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$$

$$\xrightarrow[x \to 0^-]{} -\infty$$

In tutti i casi $\sup \frac{|f(x) - f(y)|}{x - y} = +\infty$!!!

Esercizio

La funzione $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin 1/x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

è Lipschitziana su $\mathbb{R}$?

Sì

Punti di accumulazione = punti limite

Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ è punto di accumulazione

per A se $\forall U \in \mathcal{I}_{x_0}$ $\quad U \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$

ovvero

per ogni qualsiasi intorno U di x_0 cadono

∞ punti di A $(\neq x_0)$

(Questo dimostrato è stato provato)

Ricordiamo che x_0 p.d.a. per $A \Rightarrow$ $x_0 \in A$ or $x_0 \notin A$

Utilizzando il linguaggio delle successioni, si dimostra

Teorema

$A \subseteq \mathbb{R}$, x_0 p.d.a. per A

allora $\exists \{x_n\} \subseteq A \setminus \{x_0\}$ $\quad x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x_0$

per def. "$\forall U \in \mathcal{U}_{x_0}$ $\quad U \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$"

equivale "$\forall U \in \mathcal{U}_{x_0}$ $\quad \exists \bar{x} \in U \cap (A \setminus \{x_0\})$"

e questo implica, prendendo U centrato in x_0, che

$\forall U_n =]x_0 - 1/n, x_0 + 1/n[$ $\quad \exists \bar{x}_n \in U_n \cap (A \setminus \{x_0\})$

NEL CASO IN CUI $x_0 \in \mathbb{R}$

$x_0 \in \mathbb{R}$

Preso $]x_0-1, x_0+1[\cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$

"scelgo" $x_1 \in]x_0-1, x_0+1[\cap (A \setminus \{x_0\})$

Successivamente considero $k=2$, e prendo

$k_2 : \frac{1}{k_2} < \min\{\frac{1}{2}, |x_0-x_1|\}$

e "scelgo" $x_2 \in]x_0 - \frac{1}{k_2}, x_0 + \frac{1}{k_2}[\cap (A \setminus \{x_0\})$

si avrà $|x_0-x_2| < |x_0-x_1|$

Proseguo prendendo $k=3$ e considero

$k_3 : \frac{1}{k_3} < \min\{\frac{1}{3} ; |x_0-x_2|\}$

e "scelgo" $x_3 \in]x_0 - \frac{1}{k_3} ; x_0 + \frac{1}{k_3}[\cap (A \setminus \{x_0\})$

si avrà $|x_0-x_3| < |x_0-x_2| < |x_0-x_1|$

- - - -

Supponiamo di aver costruito

$|x_0-x_n| < |x_0-x_{n-1}| < \cdots < |x_0-x_2| < |x_0-x_1|$

preso $k=n+1$ considero

$k_{n+1} : \frac{1}{k_{n+1}} < \{\frac{1}{n+1} ; |x_0-x_n|\}$

e "scelgo" $x_{n+1} \in]x_0 - \frac{1}{k_{n+1}}, x_0 + \frac{1}{k_{n+1}}[\cap (A \cap \{x_0\})$

Quindi abbiamo costruito una successione

$$\{x_n\} \subseteq A \setminus \{x_0\} \text{ t.c.}$$

$x_n \neq x_0 \quad \forall n$

$|x_n - x_0| < 1/n \Rightarrow x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_0$

$\{x_n\} \subseteq A \setminus \{x_0\}$

2° Caso $x_0 = +\infty$ p.d.a. per A

In tal caso

- si "sceglie" $x_1 \in \,]1, +\infty[\, \cap A$
- si considera $k_2 > \max\{x_1, 2\}$ e poi

  si "sceglie" $x_2 \in \,]k_2, +\infty[\, \cap A$
- dopo n passi vengono individuati

$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n$$

- Si considera $k_{n+1} > \max\{n+1, x_n\}$ e

  si "sceglie" $x_{n+1} \in \,]k_{n+1}, +\infty[\, \cap A$

In tal modo si è costruita una successione

$\{x_n\}_n$ t.c. 1) $x_n \in A \; \forall n$ 2) $x_n \geq n \; \forall n$ $\Rightarrow x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

Diamo una dimostrazione alternativa del Teorema di Weierstrass

<u>Teorema</u> (Weierstrass) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua su $[a,b]$ intervallo chiuso e limitato

Allora $\exists\, x_m, X_M \in [a,b]$ $f(x_m)=\min f([a,b])$
$f(X_M)=\max f([a,b])$

<u>dim</u>

Proviamo che $\exists X_M$: $f(X_M)=\max f([a,b])$

Ora $f([a,b])\subseteq\mathbb{R}$, dunque $\boxed{\exists\, z=\sup f([a,b])}$

Ma l'estremo superiore di un insieme è p.d.a. per l'insieme medesimo, e dunque

$\exists\{y_n\}\subseteq f([a,b])$ t.c. $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z$

ovvero $\exists\{x_n\}\subseteq[a,b]$ t.c. $f(x_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{} z$

(Bolzano Weierstrass)

Ma $\{x_n\}$ è limitata $\Rightarrow$ $\exists\{x_{k_n}\}$ estratta convergente

ovvero $x_{k_n}\to \bar{x}\in[a,b]$

Ma f continua in $\bar{x}$, dunque $f(x_{k_n})\xrightarrow[n\to\infty]{} f(\bar{x})$

Ma $\{f(x_{k_n})\}$ è una sottosuccessione di $\{f(x_n)\}$

e dunque $f(x_{k_n})\xrightarrow[n\to\infty]{} z$ $\Rightarrow z=f(\bar{x})=\max f([a,b])$

Analogamente si procede per il minimo $\checkmark$

Esercizio

Calcolare $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_2^x \frac{dt}{\log t}}$

dim

Conviene riguardare il limite come

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_2^x \frac{dt}{\log t}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{dove}$$

$$g(x) = x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

$$f(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t} \geq \int_2^x \frac{dt}{t} = \log x - \log 2$$

dunque $\lim_{x\to+\infty} f(x) \geq \lim_{x\to+\infty} (\log x - \log 2) = +\infty$

Dunque è un limite del tipo ∞/∞, ovvero si può applicare l'Hopital e si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{\text{Hopital}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\log x} = 0$$

Esercizio

Studiare, al variare di α la convergenza di

① $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{\alpha x} - \cos x}{x^\alpha}\,dx$

② $\displaystyle\int_0^1 \left(1 - \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^\alpha dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \left(1-\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^\alpha dx$

$f(x)=\left(1-\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right)^\alpha$ è continua su $\begin{cases}[0,1] & \alpha\geq 0\\ ]0,1] & \alpha<0\end{cases}$

A) $\alpha\geq 0 \Longrightarrow$ la funzione è integrabile su $[0,1]$

B) $\alpha<0$: ho problemi in $\boxed{x=0}$

$f(x)=\left(1-\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right)^\alpha \qquad \left(\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}=1\ !\right)$

Si tratta di studiare $f(x)$ per $x\to 0$

$f(x)=\left(1-\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right)^\alpha=\left[1-\frac{x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)}{x}\right]^\alpha$

$=\left(\cancel{1}-\cancel{1}+\frac{x^2}{6}+o(x^3)\right)^\alpha$

e dunque $f(x)\sim\frac{x^{2\alpha}}{6^\alpha}\quad x\to 0 \qquad \forall\alpha<0$

Ma $\displaystyle\int_0^1\frac{x^{2\alpha}}{6^\alpha}dx<+\infty$ (converge)

$\underline{\text{se}}\quad \begin{cases}\alpha<0\\ 1+2\alpha>0\end{cases}$

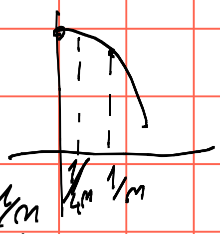
$\underline{\text{se}}\quad 0>\alpha>-\frac{1}{2}$

A)+B) $\displaystyle\int_0^1\left(1-\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right)^\alpha dx$ converge $\underline{\text{se}}$ $\alpha>-\frac{1}{2}$ ✓

Sia $I_n = \int_{1/4n}^{1/n} \frac{\cos x}{2\sqrt{x}}\,dx$ è un integrale (improprio per $n \to +\infty$

a) Calcolare $\lim_{n\to\infty} I_n$

b) studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sum_n (n^\alpha I_n)$



$$\int_{1/4n}^{1/n} \frac{\cos 1/n}{2\sqrt{x}} \le \underbrace{\int_{1/4n}^{1/n} \frac{\cos x}{2\sqrt{x}}}_{I_n} \le \int_{1/4n}^{1/n} \frac{\cos 1/4n}{2\sqrt{x}} \qquad \left[\frac{1}{4n}, \frac{1}{n}\right]$$

$$\cos\frac{1}{n} \int_{1/4n}^{1/n} \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \cos 1/n \left[\sqrt{x}\right]_{x=1/4n}^{1/n} =$$

$$= \cos 1/n \left[\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2\sqrt{n}}\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{n}} \cos 1/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$$\cos\frac{1}{4n} \int_{1/4n}^{1/n} \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{n}} \cdot \cos\frac{1}{4n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$\Longrightarrow I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ + due carabinieri

$$\sum_n \underbrace{n^\alpha I_n}_{a_n}$$

dalla discussione precedente si ha

$$n^\alpha\left(\cos\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right) \leq n^\alpha I_n \leq n^\alpha \cdot \left(\cos\frac{1}{4n}\right)\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)$$

$$\underbrace{\left(\frac{\cos 1/n}{2}\right)\cdot\frac{1}{n^{\frac{1}{2}-\alpha}}}_{b_n} \leq n^\alpha I_n \leq \underbrace{\left(\frac{\cos 1/4n}{2}\right)\cdot\frac{1}{n^{\frac{1}{2}-\alpha}}}_{c_n}$$

per quali α converge b_n? $\frac{1}{2}-\alpha > 1$!

ovvero $\boxed{-\frac{1}{2} > \alpha}$

" " " " c_n? $-\frac{1}{2} > \alpha$

per il Teorema del confronto tra serie

$\sum_n n^\alpha I_n$ converge se $-\frac{1}{2} > \alpha$