Lezione n°ro 33

Titolo nota 04/12/2011

Teorema (1° criterio integrabilità)

Se $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ $\quad$ ($f :]a,b] \to \mathbb{R}$)

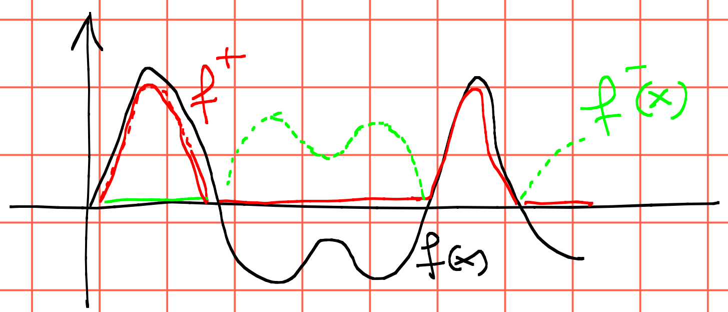
- f continua su $[a,b[$ ← mi serve per avere $\int_a^\beta f \in \mathbb{R}$
- $\boxed{|f(x)| \le \varphi(x) \ \forall x \in [a,b[}$ ← ipotesi di dominazione
- $\boxed{\varphi \text{ integrabile impropriamente}}$ su $[a,b[$ ←

allora

f integrabile impropriamente su $[a,b[$

Dim

$|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$, $\quad f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ $\quad f^-(x) = \max\{-f, 0\}$



- $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$

$f(x)$ è continua $\Rightarrow$ f^+ ed f^- sono continue

$\Rightarrow$ $|f|$ è continua

$\Rightarrow$ $\int_a^\beta f^+$ $\quad \int_a^\beta f^-$ $\quad \int_a^\beta |f|$ $\quad \int_a^\beta f$

esistono finiti $\forall \beta \in [a,b[$

Per ipotesi

$$|f| \le \varphi(x) \Rightarrow \begin{cases} f^+(x) \le \varphi(x) \\ f^-(x) \le \varphi(x) \end{cases}$$

1) $f^+ \ge 0 \Rightarrow \int_a^b f^+ dx$ esiste $\begin{cases} \text{finito} \\ +\infty \end{cases}$

Ma $\int_a^b \varphi dx < +\infty$, $f^+ \le \varphi \ \forall x \in [a,b[$ $\Rightarrow \int_a^\beta f^+ dx < \int_a^\beta \varphi dx \quad \forall \beta \in [a,b[$

$$\Rightarrow \int_a^b f^+ dx < \int_a^b \varphi dx < +\infty \Rightarrow \int_a^b f^+ dx < +\infty$$

1) $f^- \ge 0 \Rightarrow \int_a^b f^- dx$ esiste $\begin{cases} \text{finito} \\ +\infty \end{cases}$

Ma $\int_a^b \varphi dx < +\infty$, $f^- \le \varphi \ \forall x \in [a,b[$ $\Rightarrow \int_a^\beta f^- dx < \int_a^\beta \varphi dx \quad \forall \beta \in [a,b[$

$$\Rightarrow \int_a^b f^- dx < \int_a^b \varphi dx < +\infty \Rightarrow \int_a^b f^- dx < +\infty$$

Ne segue che $\int_a^b f\, dx = \int_a^b (f^+ - f^-)(x)\, dx$

$$= \underbrace{\int_a^b f^+ dx}_{\ne +\infty} - \underbrace{\int_a^b f^- dx}_{\ne +\infty}$$

$$\Rightarrow \int_a^b f dx < +\infty \quad !!$$

$\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ a termini positivi

$a_n \sim b_n$ (ovvero $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$)

(ovvero $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in]0,+\infty[$)

Allora

$\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ hanno lo stesso carattere

(divergono (o convergono) simultaneamente)

Teorema (2 criterio, confronto asintotico)

$f, g : [a,b[\to \mathbb{R}$.

- f, g continue su $[a,b[$. Serve per dare senso a $\int_a^\beta f$, $\int_a^\beta g$ $\forall \beta \in [a,\beta[$
- $f, g \geq 0$ $\forall x \in [a,b[$.
- $f \sim g$ per $x \to b$.

allora

$\{f$ integrabile impropriamente su $[a,b[\}$ sse $\{g$ integrabile impropriamente su $[a,b[\}$

$\int_a^b f$ e $\int_a^b g$ si comportano nello stesso modo (entrambi convergenti o " divergenti)

dim

① $b \in \mathbb{R}$

$f \sim g \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in [a,b[\quad b-\delta < x < b$

$$\Downarrow$$

$$1-\varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < 1+\varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$\varepsilon = \frac{1}{2} \quad \exists \bar{\delta} = \delta(\frac{1}{2}) : \forall x \in [a,b[\quad b-\delta < x < b$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3}{2}$$

$$\Downarrow$$

$\exists \bar{\delta} > 0 : \forall x \in [a,b[\quad b-\bar{\delta} < x < b \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2} g(x) < f(x)}\underbrace{< \frac{3}{2} g(x)}$

a) $\int_a^b f(x)\,dx$ converge $\Rightarrow \int_a^b \frac{1}{2} g(x)\,dx$ converge

$\Rightarrow \int_a^b g\,dx$ converge

b) $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge $\Rightarrow \int_a^b \frac{3}{2} g(x)\,dx$ diverge

$\Rightarrow \int_a^b g(x)\,dx$ diverge

c) $\int_a^b g(x)\,dx$ converge $\Rightarrow \int_a^b \frac{3}{2} g(x)$ converge

$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ converge

d) $\int_a^b g(x)$ diverge $\Rightarrow \int_a^b \frac{1}{2} g(x)\,dx$ diverge

$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ diverge

(2) $b = +\infty$

$f \sim g \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \;\exists M > 0 \;:\; \forall x \in [a, b[\;\; x > M \Rightarrow 1 - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < 1 + \varepsilon$

$\Downarrow$

$\varepsilon = \frac{1}{2} \quad \exists \bar{M} = M\left(\frac{1}{2}\right) \;:\; \forall x \in [a, b[\;\; x > \bar{M} \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3}{2}$

$\Downarrow$

OSS $\frac{1}{2} g(x) \leq f(x) \leq \frac{3}{2} g(x) \quad \forall x \in \,]b-\delta, b[$

$$\int_a^\beta f(x)\,dx = \underbrace{\int_a^{b-\delta} f(x)\,dx}_{\text{questo è un integrale definito PROPRIO}} + \underbrace{\int_{b-\delta}^{\beta} f(x)\,dx}_{\text{questa è la parte impropria}}$$

Esercizio Per quali valori di α (se ne $\exists$)

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x(\log x)^\alpha} \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{1}{x(\log x)^\alpha}$$ è definita per $x > 1$

In questo caso il punto "critico" (quello ove devo studiare $f(x)$!) è $\boxed{+\infty}$

$$\int_{\boxed{2}}^{\boxed{\beta}} \frac{dx}{x(\log x)^\alpha} \underset{\substack{x = e^y \\ dx = e^y dy}}{=} \int_{\log 2}^{\log\beta} \frac{\cancel{e^y}\, dy}{\cancel{e^y}\,[\log e^y]^\alpha} = \int_{\log 2}^{\log \beta} \frac{dy}{y^\alpha}$$

$\beta < +\infty$

$x = f(y) = e^y$ è $\nearrow$

$x = 2 \longrightarrow y = \log 2$

$x = \beta \longrightarrow y = \log\beta$

$$\lim_{\beta \to +\infty} \int_{\log 2}^{\log \beta} \frac{dy}{y^\alpha} \underset{\boxed{z = \log\beta}}{=} \lim_{z \to +\infty} \int_{\log 2}^{z} \frac{dy}{y^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \alpha \leq 1 \\ < +\infty & \alpha > 1 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x(\log x)^\alpha}$$ converge se $\alpha > 1$

Oss: $\displaystyle\int_2^{\beta} \frac{1}{x(\log x)^{\alpha}}\,dx$

$\alpha > 1$

$$\int \frac{1}{x(\log x)^{\alpha}}\,dx \underset{\substack{x=e^y \\ dx=e^y dy}}{=} \left(\int \frac{\cancel{e^y}\,dy}{\cancel{e^y}\cdot y^{\alpha}}\right)_{y=\log x} \overset{\downarrow}{=} \left(\frac{y^{1-\alpha}}{1-\alpha}+c\right)_{y=\log x}$$

$$= \frac{1}{1-\alpha}\left(\log x\right)^{1-\alpha} + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

e perciò

$$(\alpha>1) \quad \int_2^{\beta} \frac{dx}{x(\log x)^{\alpha}} = \frac{1}{1-\alpha}\left[\log(\beta)\right]^{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\left[\log 2\right]^{1-\alpha}$$

e dunque $\displaystyle\lim_{\beta\to+\infty} \int_2^{\beta} \frac{dx}{x(\log x)^{\alpha}} = \frac{1}{\alpha-1}\left(\log 2\right)^{1-\alpha} \quad \alpha>1$

Qua MOLTO Importante

Data $f(x) = \operatorname{sen} x$, per $x \to 0$ si sa che

$$\operatorname{sen} x = x + o(x^2) \qquad x \equiv p.p.$$

$1 \equiv$ l'ordine di infinitesimo

Poi $g(x) = \log(1+x)$ per $x \to 0$ si sa che

$$g(x) = x + o(x) \qquad x = p.p.$$

$1 \equiv$ ordine

PERÒ

$h(x) = \dfrac{1}{\log x}$ per $x \to +\infty$ come si comporta???

Si sa che $h(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

ma qual è il suo l'ordine di infinitesimo?

Ovvero

$$\exists \alpha : \frac{1/\log x}{1/x^\alpha} \xrightarrow[x\to+\infty]{} l \in]0,+\infty[\ ?$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1/\log x}{1/x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{\log x} \overset{\text{Hopital}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{1/x} = \lim_{x\to+\infty} \alpha x^\alpha = +\infty$$

e questo $\forall \alpha > 0$

Dunque $\left(\dfrac{1}{x}\right)^\alpha = o\left(\dfrac{1}{\log x}\right)$ $x \to +\infty$ $\forall \alpha > 0$

e questo significa che non posso dire quale sia l'ordine di infinitesimo (a meno che non sia l'ordine) di $1/\log x$ quando $x \to +\infty$!

Oss $f(x) = \frac{1}{\log x}$ $\quad f' = -\frac{1/x}{\log^2 x} = -\frac{1}{x\log^2 x}$

$$f'' = \frac{\log^2 x + 2\log x}{x^2 \log^4 x} = \frac{\log x + 2}{x^2 \log^3 x}$$

$f = 1/\log x$ ha un asintoto verticale in $x=1$

mentre $\to 0$ quando $x \to 0^+$ e quando $x \to +\infty$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad g' = -\frac{1}{2x^{3/2}} \qquad g'' = +\frac{3}{4}\cdot x^{-5/2}$$

ora si osserva che quando $x \to +\infty$

$$\frac{\log x + 2}{x^2 \log^3 x} > \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x^{5/2}}$$

$$-\frac{1}{x\log^2 x} < -\frac{1}{2x^{3/2}} \qquad \text{quando } x \to +\infty$$

$$\frac{1}{\log x} > \frac{1}{\sqrt{x}}$$

ovvero $\frac{1}{\log x} > \frac{1}{\sqrt{x}}$ insieme alle derivate prime e seconde !!!

Andamento di $1/\log x$ per $x \to 0$

$$\log x \xrightarrow[x\to 0]{} -\infty \implies \frac{1}{\log x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0^-$$

Ma con quale ordine ?

Devo confrontare $1/\log x$ con x^α e mi ho

$$\frac{1/\log x}{x^\alpha} = \frac{1}{x^\alpha \log x} = \frac{x^{-\alpha}}{\log x}$$

Hôpital

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1/\log x}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-\alpha}}{\log x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{-\alpha x^{-\alpha-1}}{1/x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} -\alpha x^{-\alpha} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\alpha}{x^\alpha}$$

$$= -\infty \quad \forall \alpha > 0$$

Dunque $1/\log x \to 0$ per $x \to 0$, ma PIU' LENTAMENTE di x^α $\forall \alpha > 0$

ovvero $x^\alpha = o\left(\frac{1}{\log x}\right)$ $x \to 0^+$ $\forall \alpha > 0$!!

Esercizio Studiare la convergenza di

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{\operatorname{sen}x} - \frac{1}{x}\right)dx$$

dim

$f(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}x} - \frac{1}{x}$ è continua su $]0,1]$

Il punto (unico) in cui studiare la converg.

è $\boxed{x=0}$

$(x \to 0)$

$$f(x) = \frac{x - \operatorname{sen}x}{x\operatorname{sen}x} = \frac{x - (x + o(x^2))}{x(x+o(x^2))}$$

$$= \frac{o(x^2)}{x^2 + o(x^3)}$$

NON MI DA' INFORMAZIONI

$$f(x) = \frac{\cancel{x} - \left(\cancel{x} - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)}{x\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)} \quad x \to 0$$

$$= \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^4)}{x^2 - \frac{x^4}{6} + o(x^5)} \quad x \to 0$$

$$= \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^2 + o(x^3)} = \frac{x}{6} \cdot \underbrace{\frac{1 + o(1)}{1 + o(1)}}_{\underset{x\to 0}{\to} 1}$$

$$f(x) \sim \frac{x}{6} \quad x \to 0$$

$f(x) \sim \frac{x}{6}$ per $x \to 0$

$f(x)$ e $x/6$ sono continue su $]0,1]$

$f(x)$ e $x/6$ sono >0 su $]0,1]$

dunque per 2° criteri convergenza

$\boxed{\int_0^1 f(x)}$ si comporta come $\boxed{\int_0^1 x/6}$

ome $\boxed{\int_0^1 x/6\, dx \text{ converge}}$

dunque $\int_0^1 \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x}\right) dx$ converge

---

Esercizio: Studiare la convergenza di

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2} - x}{\sqrt{x}}\, dx$$

dim

$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - x}{\sqrt{x}}$, ed è continua su $]0,+\infty[$

dunque i punti critici sono $\boxed{+\infty}$

e $\boxed{0}$ (f è indeterminata in 0)

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \underbrace{\int_0^1 f(x)\,dx}_{1} + \underbrace{\int_1^{+\infty} f(x)\,dx}_{2}$$

studio separatamente i 2 integrali

in merito alla convergenza

e $\int_0^{+\infty} f$ converge, diverge o è indeterminato

a seconda di ciò che fanno 1 e 2

1 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{x}}\,dx$ qui ho solo $x=0$ come punto da studiare

$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$ $x \to 0$ infatti

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{1/\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\cancel{\sqrt{x}}} \cdot \cancel{\sqrt{x}} = 1 \checkmark$$

ma $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx < +\infty$ $\left(\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx < +\infty \text{ se } \alpha < 1\right)$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{x}}\,dx \text{ converge}$$

2 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{x}}\,dx$

$$f(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}+x}$$

$$=\frac{1}{x\sqrt{x}+\sqrt{x^3+x}}=\frac{1}{x\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{1+1/x^2}}$$

$$f(x)\sim\frac{1}{2x^{3/2}}\qquad x\to+\infty \quad \text{infatti}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\frac{1}{2x^{3/2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\cancel{x\sqrt{x}}}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{1+1/x^2}}\cdot 2\cancel{x^{3/2}}$$

$$=1$$

ma $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{2x\sqrt{x}}=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{3/2}}\,dx<+\infty$

poiché l'esponente di $1/x$ è $\boxed{\frac{3}{2}>1}$

(Ricorda $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ converge sse $\alpha>1$)

$\Rightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty}f(x)\,dx$ converge

Riassumendo (1) converge, (2) converge $\Rightarrow \displaystyle\int_0^{+\infty}f\,dx$ conv.

Teorema (Convergenza serie vs Integrale improprio)

Sia $f : [a, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ $\quad f \geq 0$

Voglio sia definita in un intorno di $+\infty$!!!

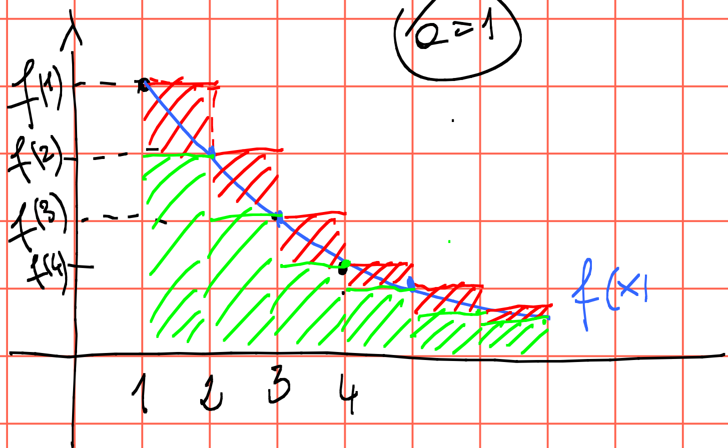
- continua $\forall x \geq a$
- f debolmente decrescente su $[a, +\infty[$

allora

$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)\,dx}$ ha lo stesso carattere di $\boxed{\sum_n f(n)}$

(converge, diverge)

$(a = 1)$



Regione Verde Colorata $\leq$ Area$\left(\{(x,y) : 1 \leq x \leq n \quad 0 \leq y \leq f(x)\}\right)$

$\|$

Regione Verde + Regione Rossa

$$\begin{cases} f(2) \leq f(x) \leq f(1) & \forall x \in [1,2] \quad (f = \searrow) \\ f(3) \leq f(x) \leq f(2) & \text{"} \in [2,3] \\ f(4) \leq f(x) \leq f(3) & \text{"} \in [3,4] \end{cases}$$

$$- - -$$

$$f(n) \le f(x) \le f(n-1) \quad x \in [n-1, n]$$

$\Downarrow$ per il Teorema confronto

$$f(2) = \int_1^2 f(2)\,dx \le \int_1^2 f(x)\,dx \le \int_1^2 f(1)\,dx = f(1)\cdot(2-1) = f(1)$$

$$f(3) = \int_2^3 f(3)\,dx \le \int_2^3 f(x)\,dx \le \int_2^3 f(2)\,dx = f(2)$$

$$- - -$$

$$f(n) = \int_{n-1}^n f(n)\,dx \le \int_{n-1}^n f(x)\,dx \le \int_{n-1}^n f(n-1)\,dx = f(n-1)$$

$$f(2)+f(3)+f(4)+\dots+f(n) \le \int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^3 \dots + \int_{n-1}^n f(x)\,dx \le f(1)+\dots+f(n-1)$$

$$\underbrace{\sum_{k=2}^{n} f(k)} \le \int_1^n f(x)\,dx \le \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} f(k)}$$

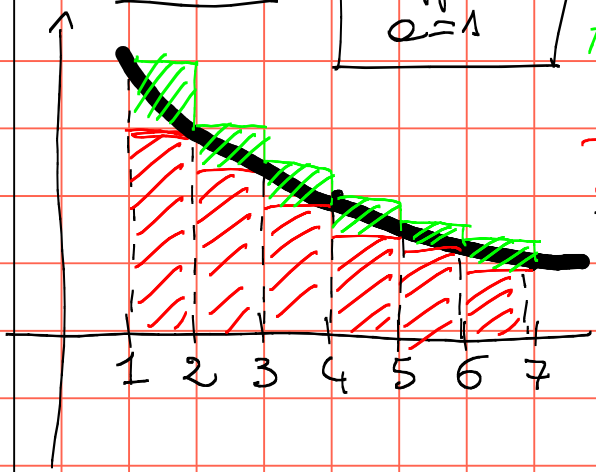
$$\sum_n f(n) \quad e \quad \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$$

si comportano allo stesso modo

$\Downarrow$

dim

Supponiamo $a=1$



$A_7 = \sum_{k=1}^{7} f(k)$

$B_7 = \sum_{k=1}^{6} f(k+1)$

Esercizio $\sum_n 1/n^\alpha$ $\begin{cases} \text{converge } \alpha > 1 \\ \text{diverge se } \alpha \leq 1 \end{cases}$

Già sapevamo che

$\sum_n 1/n^\alpha$ converge se $\alpha \geq 2$

diverge se $\alpha \leq 1$

Resta da vedere che succede quando

$1 < \alpha < 2$

$a_n = f_n = 1/n^\alpha$ con $f(x) = 1/x^\alpha$

Ma $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ $\begin{cases} \text{converge se } \alpha > 1 \\ \text{diverge se } \alpha \leq 1 \end{cases}$

e dunque concludo (Then confronto con l'integrale improprio)

$\sum_n 1/n^\alpha$ converge $1 < \alpha < 2$