

Teorema (Media Integrale)

Media integrale
di f su $[a, b]$

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ -integrabile e $\mathbb{R}$ -integrabile

Allora $\inf_{x \in [a, b]} f \leq \left[\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right] \leq \sup_{x \in [a, b]} f$

numero dim

numero

$\inf_{x \in [a, b]} f \leq f(x) \leq \sup_{x \in [a, b]} f \quad \forall x \in [a, b]$

sono $\mathbb{R}$ -integrabili su $[a, b]$

per il Teorema Comparato

$$\int_a^b \left(\inf_{x \in [a, b]} f \right) dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b \left(\sup_{x \in [a, b]} f \right) dx$$

rettangolo di
base $(b-a)$
e altezza $\inf_{x \in [a, b]} f$

rettangolo di
base $(b-a)$
e altezza
 $\sup_{x \in [a, b]} f$

$$\left(\inf_{x \in [a, b]} f \right) \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \left(\sup_{x \in [a, b]} f \right) \cdot (b-a)$$

e dunque

$$\inf_{x \in [a, b]} f \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \sup_{x \in [a, b]} f$$



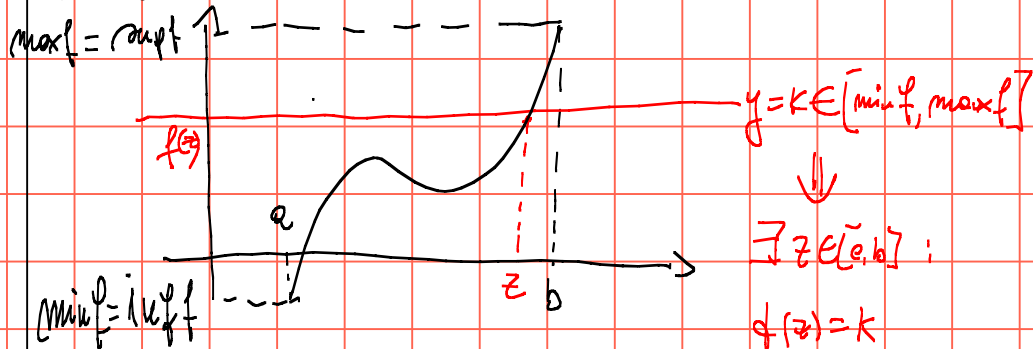
Teorema (Corollario Teorema della media)

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua

Allora f è $\mathbb{R}$ -integrabile ed $\exists z \in [a, b]$ t.c.

$$f(z) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Teorema Valori Intermedi



dim

f continua $\Rightarrow f$ $\mathbb{R}$ -integrabile su $[a, b]$

$\Rightarrow$ Vale il Teorema della Media

ovvero

$$\inf_{[a, b]} f \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f dx \leq \sup_{[a, b]} f$$

ovvero (f continua, quindi vale Weierstrass)

$$\min_{[a, b]} f \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f dx \leq \max_{[a, b]} f$$

ed ora $\kappa = \frac{1}{b-a} \int_a^b f dx$ è compreso

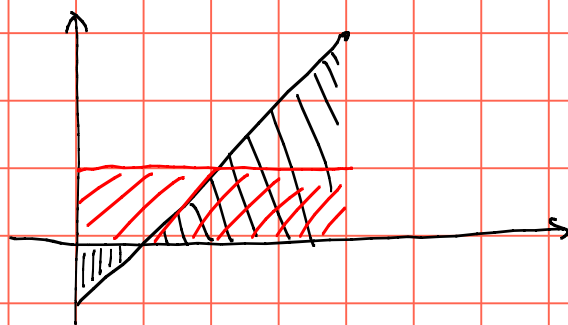
tra il minimo e il massimo di f

e quindi, per il Teorema Valori Intermedi

$$\exists z \in [a, b] \text{ t.c. } \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(z)$$

Un esempio molto semplice

$$f(x) = x - 1 \quad [a, b] = [0, 4]$$



$$\int_0^4 f(x) dx = \int_0^4 (x-1) dx$$

$$= \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$$

$$\frac{1}{4-0} \int_0^4 f(x) dx = 1$$

Il rettangolo di base $(4-0)$ e altezza

$$\frac{1}{4} \int_0^4 (x-1) dx = 1$$

ha area pari a $\int_0^4 (x-1) dx$

Teorema (spartimento)

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ -integrabile, $c \in]a, b[$

allora f è $\mathbb{R}$ -integrabile su $[a, c]$ e su $[c, b]$

e si ha

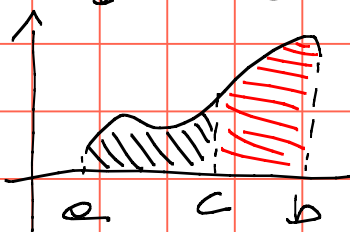
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (*)$$

Valle pure il viceversa: f $\mathbb{R}$ -integrabile su

$[a, c]$ e su $[c, b]$ allora f è $\mathbb{R}$ -int. su

$[a, b]$ e si ha $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

Un disegno
esplicativo



dim.

Prendiamo una $\forall$ suddivisione di $[a, b]$, sia $\mathcal{A}$, si consideri

$$\mathcal{A} \cup \{c\} = \mathcal{A}_c$$

$$S'(f, \mathcal{A}) \leq S'(f, \mathcal{A}_c \cap [a, c]) + S'(f, \mathcal{A}_c \cap [c, b])$$

$$S''(f, \mathcal{A}_c \cap [a, c]) + S''(f, \mathcal{A}_c \cap [c, b]) \leq S''(f, \mathcal{A})$$

in quanto $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_c$

dunque

$\forall \varepsilon > 0 \exists \mathcal{A}$ (e quindi $\mathcal{A}_c$) t.c.

$$\left[S''(f, \mathcal{A}_c \cap [a, c]) - S'(f, \mathcal{A}_c \cap [a, c]) \right] + \left[S''(f, \mathcal{A}_c \cap [c, b]) - S'(f, \mathcal{A}_c \cap [c, b]) \right]$$

$$\leq S''(f, \mathcal{A}) - S'(f, \mathcal{A}) < \varepsilon$$

da cui segue la Tesi



Integrale su un intervallo orientato

È necessario dare un senso a

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{quando} \quad \begin{array}{l} a \leq b \text{ (già noto)} \\ \text{oppure} \\ a > b \text{ (da definire!)} \end{array}$$

e a tal fine si pone

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx}$$

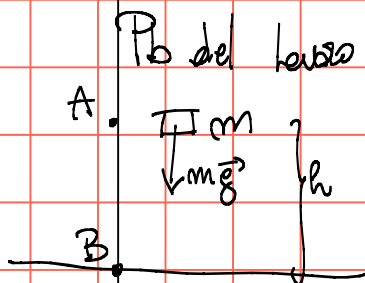
Voglio dare significato a

$$\int_2^0 f(x) dx \stackrel{\text{Def}}{=} - \int_0^2 f(x) dx$$

$$\begin{aligned} \int_0^7 f(x) dx &= \int_0^{16} f(x) dx - \int_7^{16} f(x) dx \\ &= \int_0^{16} f(x) dx + \int_{16}^7 f(x) dx \end{aligned}$$

Volgarmente
entrambe

$$F(x) = \int_0^x t dt = \begin{cases} \int_0^x t dt & x > 0 \\ - \int_0^x t dt & x < 0 \end{cases}$$



Si pensi a un corpo di massa m posto ad altezza h rispetto alla superficie terrestre soggetto alla sola forza di gravità $m g$

Se il corpo muove da A a B (esde)

la forza $m\vec{g}$ compie un lavoro positivo $\equiv |mgh|$

Se il corpo muove da B a A (sde)

la forza $m\vec{g}$ compie un lavoro negativo

(si oppone al moto!) pari a $-|mgh|$

Donque $L(A \rightarrow B) = -L(B \rightarrow A)$

Ques In $\mathbb{R}^2$ questo non ha più senso, poiché

si integra su un rettangolo

$[a,b] \times [c,d]$ non esiste un senso di

percorrenza

L'integrale orientato ha senso su delle

curve, dove si possa stabilire un

"prima" e un "dopo" rispetto a un certo

punto, ovvero insieme totalmente ordinati

- Le funzioni continue sono ancora integrabili ✓
- " " monotone " " " ✓
- Il Teorema di spettamento vale in forma estesa.

Teorema $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ -integrabile su $[a, b]$ $\forall a, b \in I$

per $a, b, c \in I$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad \text{dove } \begin{cases} c \in]a, b[\\ c \notin]a, b[\end{cases}$$

ad esempio $\int_2^3 x dx = \int_2^5 x dx - \int_5^3 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_2^5 - \frac{x^2}{2} \Big|_5^3$

- Linearità e omogeneità continuano a valere ✓

Unica nota è riguardo il Teorema del confronto

Teorema $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ -integrabile

allora $|f|$ è $\mathbb{R}$ -integrabile e

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

(bisogna fare attenzione in quanto

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad \text{solo se } b \geq a!$$

in quanto, esempio

$$\int_{+1}^{-3} |f(x)| dx = - \int_{-3}^{+1} |f(x)| dx$$

Teorema (Fondamentale del Calcolo Integrale)

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$ funzione continua sull'intervallo I

Fissato $a \in I$ si pone $F(x) = \int_a^x f(t) dt$

allora $F(x)$ è una primitiva di f su I

Ques Intendo se f continua allora f R. Integrabile

su intervallo $[\alpha, \beta] \subset I$

Ques Questo Teorema non mi dice come esprimere $F(x)$ in termini di funzioni elementari perché? perché esistono primitive non esprimibili in termini di funzioni elementari

dim
 f continua su $I \Rightarrow f$ integrabile su $[\alpha, \beta] \forall \alpha, \beta \in I$

Devo provare che $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ è una primitiva di $f(x)$, ovvero

$$\boxed{F'(x) = \frac{d}{dx} F(x) = f(x) \quad \forall x \in I \quad \S}$$

Primo $x_0 \in I$

$$\S \quad F'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$$

$$\frac{1}{x - x_0} (F(x) - F(x_0)) = \frac{1}{x - x_0} \left(\int_{x_0}^x f(t) dt - \int_{x_0}^{x_0} f(t) dt \right)$$

Per il teorema di

$$\stackrel{\text{teorema}}{=} \frac{1}{x - x_0} \left(\int_{x_0}^{x_0} f(t) dt + \int_{x_0}^x f(t) dt - \int_{x_0}^{x_0} f(t) dt \right)$$

$$= \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t) dt = f(z)$$

media integrale
di f su $[x_0, x]$
o $[x, x_0]$

Condizione
teorema
media

z è compreso
tra x_0 e x

ovvero

$$|z - x_0| \leq |x - x_0|$$

dunque quando $x \rightarrow x_0 \Rightarrow |x - x_0| \rightarrow 0 \Rightarrow |z - x_0| \rightarrow 0$

$$\Rightarrow z \rightarrow x_0$$

$$F'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t) dt = \lim_{z \rightarrow x_0} f(z)$$

$\nwarrow$ f continua
 $f(x_0)$



Teorema (Torricelli)

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continua su I

$G(x)$ sia una primitiva di $f(x)$

$a \in I$ fisso

Allora

$$\textcircled{1} \exists c \in \mathbb{R} \text{ t.c. } G(x) = \int_a^x f(t) dt + c$$

$$\textcircled{2} \forall \alpha, \beta \in I \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

diciam

$$\textcircled{1} F(x) = \int_a^x f(t) dt \text{ è una primitiva di } f \text{ (Teorema fondamentale calcolo)}$$

$G(x)$ è una primitiva di f (x ipotesi)

due primitive differiscono per una costante

$$\text{allora } \exists c \in \mathbb{R} \text{ t.c. } G(x) = \int_a^x f(t) dt + c$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt &= \int_{\alpha}^a f(t) dt + \int_a^{\beta} f(t) dt \quad (\text{due spezzamenti}) \\ &= - \int_a^{\alpha} f(t) dt + \int_a^{\beta} f(t) dt \quad (\text{orientato}) \end{aligned}$$

$$= -(G(\alpha) - c) + (G(\beta) - c) = G(\beta) - G(\alpha) \quad \swarrow$$

$$F(x) = \int_1^x \frac{dt}{t} = \log x \quad \text{!!!}$$

$$\int_1^x \frac{dt}{t} = \log x \quad \underline{\forall x > 0}$$

si ricorda che f deve essere definita su un intervallo contenente 1

$$f(t) = 1/t \text{ è definita su } \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

teorema
fondamentale

$$\int_1^x \frac{dt}{t} =$$

(-1)

$$= G(x) - G(-1)$$

$$= \log|x| - \log|-1| \quad \boxed{x < 0}$$

$$= \log(-x)$$

↑

$$x > 0$$

$$\int_1^x \frac{dt}{t} = \log x$$

$$x < 0$$

$$\int_1^x \frac{dt}{t} = \log(-x)$$

$$x > 0$$

$$\int_{-1}^x \frac{dt}{t} = \text{non ottengo nulla!!!}$$

in quanto $1/t$ non è definita in t=0

Esempio

Calcolare

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$$

① primo calcolo: una primitiva di $\sin^2 x$

② " applico Teorema Torricelli

$$\int \sin^2 x dx = \underbrace{\frac{x}{2} - \frac{\sin x \cos x}{2}}_{G(x)} + C$$

$$\begin{aligned} G'(x) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} (\cos^2 x - \sin^2 x) = \\ &= \frac{1}{2} \sin^2 x + \frac{1}{2} \sin^2 x = \sin^2 x \end{aligned}$$

$$\text{2° passo } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin x \cos x}{2} \right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} = G\left(\frac{\pi}{2}\right) - G(0)$$

Calcolare $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Calcolare $\int_1^2 (t^2+1) dt$

① però Calcolo primitiva di $f(t) = t^2+1$

$$\int (t^2+1) dt = \int t^2 dt + \int 1 dt = \frac{t^3}{3} + t + C$$

② però $G(t) = \frac{t^3}{3} + t$ (una primitiva)

$$\int_1^2 (t^2+1) dt = \left[\frac{t^3}{3} + t \right]_{t=1}^{t=2} = \left[G(t) \right]_{t=1}^{t=2}$$

$$= G(2) - G(1)$$

$$= \left(\frac{2^3}{3} + 2 \right) - \left(\frac{1^3}{3} + 1 \right)$$

$$= \frac{7}{3} + 1 = \frac{10}{3}$$

$$\int_0^1 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

Esercizio data $F(x) = \int_0^{\cos x} \frac{t^2 + t}{t^4 + 1} dt$

calcolare $F'(\frac{\pi}{6})$

Modo ingenuo calcolo $G(t)$ una primitiva

di $f(t) = \frac{t^2 + t}{t^4 + 1}$

e poi

$$\int_0^{\cos x} f(t) dt = G(\cos x) - G(0) = h(x)$$

e poi calcolo $h'(x)$

$\frac{t^2 + t}{t^4 + 1} =$

$t^4 = -1$

$\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$
 $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$
 $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i)$
 $\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$

T_1

T_2

$$\frac{t^2 + t}{t^4 + 1} = \frac{Ax + B}{T_1} + \frac{Cx + D}{T_2}$$

e una volta calcolo una primitiva calcolo

$$h(x) = G(\cos x) - G(0)$$

e infine calcolo $h'(\frac{\pi}{6})$

2° modo (uno Teorema fondamentale del calcolo
(integrale))

Osservo che $F(x) = \int_0^{\cos x} \frac{t^2+t}{t^4+1} dt$ è una

funzione composta

$$x \xrightarrow{g_2} \cos x \xrightarrow{g_1} \int_0^{\cos x} \frac{t^2+t}{t^4+1} dt$$

$$g_2(x) = \cos x \quad g_1(y) = \int_0^y \frac{t^2+t}{t^4+1} dt$$

$$g_2'(x) = -\sin x \quad g_1'(y) = \frac{y^2+y}{y^4+1}$$

$$F(x) = g_1(g_2(x)) = (g_1 \circ g_2)(x)$$

$$F'(x) = g_1'(g_2(x)) \cdot g_2'(x)$$

$$= \frac{\cos^2 x + \cos x}{\cos^4 x + 1} \cdot (-\sin x)$$

$$\text{e dunque } F'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{9}{16} + 1} \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{3+2\sqrt{3}}{4}$$

$$= -\frac{6+4\sqrt{3}}{25}$$

$$F(t) = \int_x^t t^2 dt = - \int_2^x t^2 dt \Rightarrow F(t) = -x^2$$

$$F(x) = \int_{x^2}^x e^{t^2} dt$$

$$F'(x) = ?$$

$$F(x) = \int_{x^2}^{\pi} e^{t^2} dt + \int_{\pi}^x e^{t^2} dt$$

$$= - \underbrace{\int_{\pi}^{x^2} e^{t^2} dt}_{(1)} + \underbrace{\int_{\pi}^x e^{t^2} dt}_{(2)}$$

$$F'(x) = -[e^{x^2}] \cdot [2x] + e^{x^2}$$

$$F(x) = \underbrace{\int_{\pi}^x e^{t^2} dt}_{(1)} - \underbrace{\int_{\pi}^{x^2} e^{t^2} dt}_{(2)}$$

$$F'(x) = \frac{d}{dx} (1) - \frac{d}{dx} (2)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{\pi}^x e^{t^2} dt \right) = e^{x^2}$$

the first
calcolo

$$\frac{d}{dx} (2) = \frac{d}{dx} \left(\int_{\pi}^{x^2} e^{t^2} dt \right)$$

$$x \xrightarrow{g_2} x^2 \xrightarrow{g_1} \int_{\frac{1}{x^2}}^{x^2} e^{t^2} dt$$

$$\int_{\frac{1}{x^2}}^{x^2} e^{t^2} dt = g_1(g_2(x)) = (g_1 \circ g_2)(x)$$

$$g_2(x) = x^2$$

$$g_2' = 2x$$

Thm of fund. calc.

$$g_1(y) = \int_{\frac{1}{y}}^y e^{t^2} dt$$

$$g_1'(y) = e^{y^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\int_{\frac{1}{x^2}}^{x^2} e^{t^2} dt \right) &= g_1'(g_2(x)) \cdot g_2'(x) \\ &= e^{(x^2)^2} \cdot 2x \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{x^2}^x e^{t^2} dt \right) = e^{x^2} - e^{x^4} \cdot 2x$$

Esercizio Calcolare $F'(x)$ dove

$$F(x) = \int_{x^2+x}^2 e^{t^2} dt$$

Fora per
esercizio
a casa

Domanda La funzione $\ln x$

Si può definire $\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$

• $\ln x$ è definita $\forall x > 0$

• $\ln x > 0, x > 1$

$\ln x < 0, x < 1$

• $\ln x + \ln y = \ln xy \quad \forall x, y > 0$

$$\int_1^{xy} \frac{dt}{t} = \int_1^x \frac{dt}{t} + \int_x^{xy} \frac{dt}{t} \quad t = xu$$

$$= \int_1^x \frac{dt}{t} + \int_1^y \frac{x du}{xu} = \ln x + \ln y$$

etc

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

f limitata

$[a, b]$ limitato

Per queste funzioni $\uparrow$ si è sviluppata la

Teoria dell'Integrazione di Riemann

Se viene a mancare

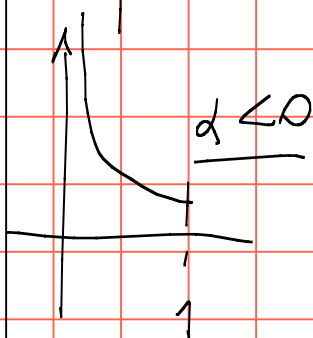
- la limitatezza di f su $[a, b]$

- la limitatezza di $[a, b]$

- entrambi

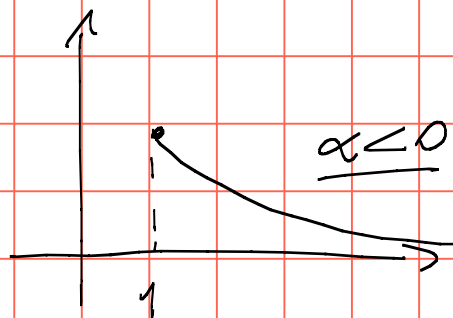
si parla di "Integrali Impropri"

$$\int_0^1 x^\alpha dx$$



$$\int_1^{+\infty} x^{\alpha/x} dx$$

di valori
di α



$$\bullet \int_0^1 x^\alpha dx = \lim_{p \rightarrow 0} \int_p^1 x^\alpha dx = \begin{cases} +\infty & \alpha < -1 \\ +\infty & \alpha = -1 \\ \frac{1}{\alpha-1} & \alpha > -1 \end{cases}$$

$$\bullet \int_1^{+\infty} x^\alpha dx = \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_1^p x^\alpha dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \alpha < -1 \\ +\infty & \alpha = -1 \\ +\infty & \alpha > -1 \end{cases}$$

